

MODEL PENINGKATAN RELIABILITAS PRODUK UNTUK PRODUK YANG DIJUAL DENGAN GARANSI

Yanti Helianty¹⁾, Bermawi P. Iskandar²⁾

¹⁾Jurusan Teknik dan Manajemen Industri

Institut Teknologi Nasional

Jl. PHH Mustapa No. 23 Bandung

²⁾Program Studi Teknik Industri

Institut Teknologi Bandung

Jl. Ganesa 10, Bandung 40132

Menjual produk dengan garansi berarti ada ongkos tambahan yang dikeluarkan produsen untuk perbaikan produk rusak selama masa garansi. Untuk masa garansi tertentu ongkos ini tergantung dari banyaknya jumlah klaim selama masa garansi yang dipengaruhi oleh karakteristik laju kerusakan produk. Ongkos ini dapat diminimasi dengan cara meningkatkan keandalan (*reliability improvement*) produk/sistem, karena produk dengan reliabilitas yang tinggi dapat mengurangi jumlah kerusakan. Pada makalah ini dikembangkan model untuk meningkatkan reliabilitas produk yang dijual dengan garansi. Produk yang dipertimbangkan adalah produk yang terdiri dari beberapa komponen yang disusun dengan rangkaian seri. Kerusakan produk dapat disebabkan oleh kerusakan dari salah satu komponen atau lebih, sehingga untuk meningkatkan keandalan produk dapat dilakukan dengan cara meningkatkan keandalan dari komponen-komponennya. Peningkatan reliabilitas komponen dilakukan dengan cara menentukan parameter desain pada tahap perancangan. Dengan dilakukan peningkatan keandalan maka laju kerusakan komponen dapat dikurangi dan dapat menurunkan ongkos garansi. Namun peningkatan keandalan memerlukan ongkos berupa ongkos investasi dan ongkos produksi. Parameter desain yang optimal diperoleh dengan memaksimalkan penghematan total ongkos yang merupakan selisih antara penurunan ongkos garansi dengan penambahan ongkos investasi untuk peningkatan keandalan dan ongkos produksi. Contoh numerik untuk memberikan gambaran tentang parameter desain yang optimal untuk setiap komponen.

Kata kunci : Garansi, peningkatan keandalan, rangkaian seri, komponen.

Selling products with warranty results in additional cost to the manufacturer due to the servicing for product failures during the warranty period. For a given warranty term the warranty cost per unit depends on the number of warranty claims that influences by the failure rate function of the product. This cost can be reduced by improving product reliability, as the higher product reliability can decrease the expected number of failures. In this paper, we developed a model for improving product reliability for the product sold with warranty. The product can be viewed as a system consists of several components with series structure. The product failure can be caused of failure of one component or more. In this research, the product reliability is improved through the improvement of reliability of its components. We developed the model to improve the component reliability through determining the design parameter in the design phase. The reliability improvement can reduce the expected number of failures, and the warranty cost. However the reliability improvement needs in additional costs in the form of investment cost and production cost. We obtain the optimal design parameters that maximizes the saving cost resulting from the saving due to the reliability improvement- i.e. saving cost due to the decreasing of the warranty cost minus additional cost (i.e. investment cost and production cost). Numerical examples are given to illustrate the optimal design parameters for each component.

1. Pengantar

Pada saat ini, sebagian besar produk yang beredar dipasar dijual dengan garansi. Sebagai contoh, produk elektronik (seperti TV, kulkas, mesin cuci, dll). Garansi merupakan salah satu instrumen yang diberikan oleh produsen dengan tujuan untuk melindungi konsumen terhadap produk yang telah dibelinya. Namun, garansi juga bermanfaat baik bagi produsen. Dari sudut pandang produsen, garansi melindungi dari klaim yang tidak rasional dari konsumen, dan karena garansi juga memberikan informasi mengenai kualitas dan keandalan produk, maka garansi digunakan sebagai alat promosi yang efektif.

Menjual produk dengan garansi berarti ada ongkos tambahan bagi produsen karena harus memperbaiki produk yang rusak selama masa garansi. Kerusakan pada produk berkaitan dengan keandalan produk tersebut. Keandalan produk yang rendah akan mengakibatkan terjadinya banyak klaim selama masa garansi sehingga ongkos garansi menjadi besar. Ongkos garansi ini dapat diminimasi dengan cara meningkatkan keandalan produk dan ini selanjutnya dapat mengurangi jumlah klaim/kerusakan.

Penelitian yang membahas mengenai garansi dan keandalan, telah banyak dilakukan oleh peneliti terdahulu, diantaranya Murthy (2006) menjelaskan kerangka kerja yang komprehensif dari studi garansi dan kaitannya dengan keandalan produk. Hussain dan Murthy (2003) meminimasi ongkos garansi dengan peningkatan keandalan yang optimal melalui *product development*.

Vintr (dalam Murthy dan Djamaludin, 2002) membahas dua kasus dalam penentuan reliabilitas yang optimal untuk produk yang dijual dengan garansi. Pada kasus pertama periode garansi ditetapkan dan reliabilitas yang optimal diperoleh melalui minimasi ongkos manufaktur. Sedangkan pada kasus kedua periode garansi menjadi variabel keputusan yang dapat memberikan reliabilitas yang optimal. Majeske dan Herin (dalam Murthy dan Djamaludin, 2002) membahas perubahan desain produk untuk penghematan ongkos garansi.

Penelitian lain yang membahas mengenai peningkatan reliabilitas adalah Prassetiyo (2006). Pada penelitian ini *reliability improvement* produk dilakukan melalui penentuan parameter desain pada tahap desain ulang produk. Penelitian Prassetiyo difokuskan pada produk dengan komponen tunggal atau *single component system*.

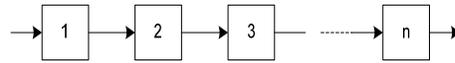
Penelitian Thomas & Richard (2006) membahas pengembangan model peningkatan reliabilitas produk dari sistem dengan banyak komponen. Produk yang dipertimbangkan terdiri dari n komponen ($n > 1$) dengan susunan seri dan masing-masing komponen memiliki laju kerusakan konstan. Peningkatan reliabilitas pada tingkat komponen ditentukan berdasarkan proporsi dari besarnya ongkos garansi untuk setiap komponen terhadap total ongkos garansi keseluruhan komponen. Pada penelitian Thomas dan Richard (2006), target reliabilitas produk ditentukan sebelumnya dan peningkatan reliabilitas komponen harus memenuhi kepada target reliabilitas tersebut, dan penentuan keandalan komponen hanya berdasarkan pada maksimasi penghematan ongkos garansi.

Peningkatan reliabilitas dapat memberikan penghematan ongkos garansi tetapi juga dapat mengakibatkan peningkatan ongkos investasi dari peningkatan reliabilitas dan dapat menaikkan ongkos produksi. Apabila penambahan ongkos produksi dan ongkos investasi *reliability improvement* lebih besar dari penghematan ongkos garansi, maka *reliability improvement* menjadi tidak berarti. Adanya *trade off* antara pengurangan biaya garansi dengan penambahan ongkos produksi dan ongkos investasi *reliability improvement*, memberikan peluang untuk mengembangkan model peningkatan reliabilitas yang optimal. Pada penelitian ini, dikembangkan model peningkatan reliabilitas dengan kriteria maksimasi selisih antara penghematan ongkos garansi dengan penambahan ongkos produksi dan ongkos investasi *reliability improvement*. Peningkatan reliabilitas dilakukan dengan cara menentukan parameter desain pada tahap desain produk. Pengembangan model ini mempertimbangkan laju kerusakan komponen yang bersifat menaik.

Berikut ini diberikan organisasi dari makalah ini. Bagian 2 menjelaskan Sistem Relevan untuk meminimasi ongkos garansi dengan peningkatan keandalan, dan bagian 3 menjelaskan pengembangan Model. Pada bagian 4 diberikan contoh numerik untuk model yang dikembangkan dan akhirnya pada bagian 5 diberikan kesimpulan.

2. Sistem Relevan

Pada penelitian ini dipertimbangkan produk yang terdiri dari banyak komponen yang dijual dengan garansi. Komponen-komponen tersebut disusun secara seri, dan setiap komponen memiliki laju kerusakan yang independen satu dengan yang lainnya. Kerusakan pada salah satu komponen atau lebih akan mengakibatkan kerusakan produk. *Reliability Block Diagram* untuk produk yang terdiri dari n ($n > 1$) komponen dengan rangkaian seri dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. *Reliability Block Diagram* untuk produk dengan n ($n > 1$) komponen rangkaian seri

Setiap komponen diasumsikan memiliki laju kerusakan yang menaik (*increasing failure rate*). Pada penelitian ini untuk memodelkan kegagalan komponen direpresentasikan dengan distribusi Weibull dengan fungsi *densitas*, fungsi distribusi, fungsi reliabilitas, dan fungsi laju kerusakan, masing-masing diperlihatkan oleh persamaan (1), (2), (3), dan (4).

$$f(t) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{(\alpha)^\beta} \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right] \quad (1)$$

$$F(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right] \quad (2)$$

$$R(t) = 1 - \int_0^t f(t') dt' \quad (3)$$

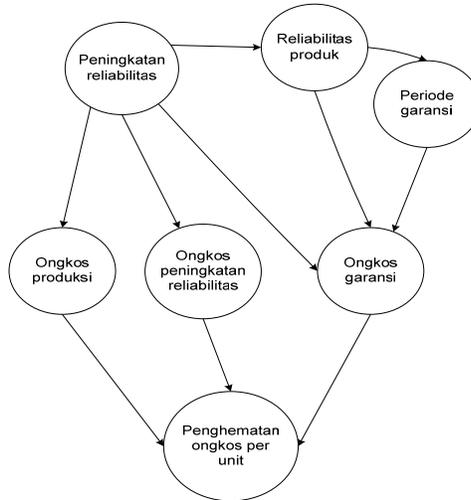
$$\lambda(t) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{(\alpha)^\beta} \quad (4)$$

Kebijakan garasi yang dipertimbangkan dalam penelitian ini adalah *Free Replacement Warranty* (FWR), yaitu produk akan diperbaiki secara gratis jika terjadi kerusakan selama periode garansi, misalnya 12 bulan, 1 tahun atau 2 tahun. Perbaikan terhadap komponen yang rusak dilakukan dengan *minimal repair* yaitu memperbaiki produk yang rusak sehingga kembali pada kondisi saat sebelum rusak.

Jumlah kerusakan/klaim yang terjadi selama periode garansi berdampak pada ongkos garansi yang harus ditanggung oleh produsen. Semakin banyak jumlah kerusakan, maka ongkos garansi akan semakin besar. Ongkos garansi dapat diturunkan melalui penurunan laju kerusakan produk atau peningkatan keandalan produk.

Peningkatan keandalan produk dapat dilakukan dengan beberapa cara/pendekatan, yaitu dapat dilakukan pada tahap desain produk, pada tahap produksi, pada tahap sebelum produk dijual maupun pada tahap distribusi. Pada makalah ini, peningkatan reliabilitas dilakukan dengan cara melakukan desain ulang produk. Desain ulang dapat dilakukan dengan cara menentukan parameter desain yang optimal dari setiap komponen yang dilakukan pada tahap desain produk.

Peningkatan keandalan produk yang dilakukan pada penelitian ini adalah melalui peningkatan keandalan komponen-komponennya. Peningkatan keandalan komponen dilakukan dengan cara menghambat laju kerusakan sehingga nilai fungsi reliabilitas menjadi lebih besar dan dapat mengurangi ongkos garansi. Namun disisi lain untuk meningkatkan keandalan komponen memerlukan ongkos, yaitu ongkos investasi dan ongkos produksi. Faktor yang relevan terhadap peningkatan reliabilitas dan ongkos-ongkos yang terkait dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Hubungan antar faktor relevan

3. Formulasi Model

Pada penelitian ini akan dikembangkan 2 Model yaitu Model 1 dan Model 2. Model 1 yaitu model peningkatan reliabilitas komponen tanpa pembatas ongkos investasi. Sedangkan Model 2 yaitu model peningkatan reliabilitas komponen dengan pembatas ongkos investasi. Beberapa asumsi yang digunakan dalam pengembangan model ini adalah:

- Setiap kerusakan pada produk akan mengakibatkan klaim, dan pada saat terjadi kerusakan produk dalam periode garansi maka saat itu juga dilakukan klaim garansi oleh konsumen
- Perbaikan kerusakan klaim produk adalah *minimal repair* yaitu mengembalikan kondisi produk ke kondisi sebelum terjadi kerusakan
- Lama penanganan klaim dan waktu perbaikan produk diabaikan.

Untuk memudahkan penyusunan model matematika diperlukan notasi-notasi. Notasi yang digunakan pada pengembangan model ini adalah:

- α_i : parameter desain untuk komponen- i sebelum *reliability improvement* (α mengambil nilai pada ruang bilangan riil positif ($\alpha > 0$))
- α'_i : parameter desain untuk komponen- i sesudah *reliability improvement* (α' mengambil nilai pada ruang bilangan riil positif ($\alpha' > 0$))
- $G(\alpha_i)$: Ekspektasi ongkos garansi komponen- i selama masa garansi sebelum *reliability improvement*
- $G(\alpha'_i)$: Ekspektasi ongkos garansi komponen- i selama masa garansi sesudah *reliability improvement*
- $W(\alpha'_i)$: Ekspektasi penghematan ongkos garansi komponen- i selama masa garansi (Rp/unit)
- $W_s(\alpha')$: Ekspektasi penghematan ongkos garansi per produk (Rp/unit)
- $E[N(w;\alpha_i)]$: Ekspektasi jumlah kerusakan komponen- i selama masa garansi sebelum *reliability improvement* (kerusakan/unit)
- $E[N(w;\alpha'_i)]$: Ekspektasi jumlah kerusakan komponen- i selama masa garansi sesudah *reliability improvement* (kerusakan/unit)
- $I(\alpha'_i)$: Ongkos *reliability improvement* komponen- i (Rp/unit)
- $I_s(\alpha')$: Ongkos *reliability improvement* per produk (Rp/unit)
- $P(\alpha'_i)$: Ekspektasi penambahan ongkos produksi komponen- i akibat adanya *reliability improvement* (Rp/unit)
- $P_s(\alpha')$: Ekspektasi penambahan ongkos produksi per produk akibat adanya *reliability improvement* (Rp/unit)
- i : jumlah komponen dalam satu produk ($i=1,2,\dots,n$)
- C_{wi} : rata-rata ongkos minimal repair per kerusakan untuk komponen- i (Rp/kerusakan)

- D_i : parameter fungsi ongkos produksi komponen- i
 c_{oi} : ongkos setup *reliability improvement* komponen- i (Rp/unit)
 c_{ri} : ongkos *reliability improvement* untuk setiap penambahan nilai parameter desain dari komponen- i (Rp/unit)
 m : parameter fungsi ongkos investasi *reliability improvement*
 u : parameter fungsi ongkos produksi
 w : masa garansi
 ξ : Koefisien *Lagrange*
 M : Jumlah investasi yang tersedia untuk melakukan *reliability improvement* (Rp/unit)

Pada penelitian ini yang menjadi ukuran performansi model yang digunakan adalah:

$H(\alpha')$: Ekspektasi penghematan ongkos total per unit selama masa garansi (Rp/unit)

Variabel keputusan yang digunakan :

α'_i : nilai parameter desain untuk komponen- i yang digunakan dalam proses desain setelah dilakukan *reliability improvement*.

3.1. Formulasi Model 1: [Tanpa Pembatas Investasi]

Pada kasus ini ongkos yang diperlukan untuk melakukan peningkatan reliabilitas komponen diasumsikan tersedia. Andaikan $W_s(\alpha)$, $P_s(\alpha)$, dan $I_s(\alpha)$ merepresentasikan masing-masing untuk ekspektasi penghematan ongkos garansi, ekspektasi penambahan ongkos produksi, dan ongkos *reliability improvement* per produk, maka ekspektasi penghematan total ongkos diberikan oleh persamaan:

$$H(\alpha') = W_s(\alpha') - P_s(\alpha') - I_s(\alpha')$$

Penjelasan lebih rinci mengenai Ekspektasi penghematan ongkos garansi per produk, ekspektasi penambahan ongkos produksi, dan ongkos *reliability improvement* selama masa garansi akan diberikan berikut ini.

(a) Ekspektasi Penghematan Ongkos Garansi per unit

Ekspektasi penghematan ongkos garansi per unit selama masa garansi ditentukan oleh besarnya ekspektasi penghematan ongkos garansi dari komponen-komponen yang membentuk produk tersebut. Ekspektasi penghematan ongkos garansi per unit selama masa garansi ditunjukkan pada persamaan (5)

$$\begin{aligned}
 W_s(\alpha') &= \sum_{i=1}^n W(\alpha'_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n (c_{wi} E[N(w; \alpha_i)] - c_{wi} E[N(w; \alpha'_i)]) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(c_{wi} \int_0^w \lambda(t; \alpha_i) dt - c_{wi} \int_0^w \lambda(t; \alpha'_i) dt \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n c_{wi} \left(\frac{w^\beta}{(\alpha_i)^\beta} - \frac{w^\beta}{(\alpha'_i)^\beta} \right)
 \end{aligned} \tag{5}$$

(b) Ekspektasi Penambahan Ongkos Produksi per unit

Ekspektasi penambahan ongkos produksi per unit terjadi karena adanya peningkatan ongkos produksi untuk memperoleh produk dengan reliabilitas yang lebih tinggi. Besarnya ekspektasi penambahan ongkos produksi per komponen bergantung pada reliabilitas komponen (Liu et.al., 2006). Liu et. al. (2006) merumuskan model ongkos produksi sebagai berikut :

$$c_{mo} = D\lambda^{-u}$$

Penelitian Liu et. al. (2006) menggunakan laju kerusakan produk berdistribusi eksponensial, sehingga semakin kecil nilai λ produk semakin *reliable* dan ongkos produksi semakin besar.

Berdasarkan model tersebut pada penelitian ini, untuk menghitung ekspektasi penambahan ongkos produksi dapat digunakan pendekatan bahwa semakin *reliable* sebuah komponen maka ongkos produksi komponen tersebut semakin mahal. Ekspektasi penambahan ongkos produksi per unit diperlihatkan pada persamaan (6).

$$P_s(\alpha') = \sum_{i=1}^n P(\alpha'_i) \\ = \sum_{i=1}^n D_i \left[\left(\alpha'_i \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right)^u - \left(\alpha_i \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right)^u \right] \quad (6)$$

dimana $u > 2$

(c) Ongkos *Reliability Improvement*

Ongkos *reliability improvement* per komponen diperlukan untuk meningkatkan reliabilitas komponen yang dicerminkan oleh besarnya nilai parameter skala α menjadi α' . Ongkos investasi untuk melakukan *reliability improvement* tergantung pada besarnya perubahan α menjadi α' ($\delta = \alpha' - \alpha$). Semakin besar δ maka semakin besar ongkos investasi yang harus dikeluarkan. Ongkos *reliability improvement* tergantung pada besarnya ongkos *reliability improvement* komponennya. Ongkos investasi untuk melakukan *reliability improvement* per produk ditunjukkan oleh persamaan (7)

$$I_s(\alpha') = \sum_{i=1}^n I(\alpha'_i) \\ = \sum_{i=1}^n (c_{oi} + c_{ri} (\alpha'_i - \alpha_i)^m) \quad (7)$$

dimana $m > 2$

Solusi optimal dari Model 1 dapat diperoleh dengan memaksimalkan ekspektasi penghematan ongkos per unit selama masa garansi. Bentuk sistem persamaan *non linier programming* dari Model 1 diperlihatkan oleh persamaan (8)

Maksimasi

$$H(\alpha') = \left(\begin{array}{l} \sum_{i=1}^n c_{wi} \left(\frac{w^\beta}{(\alpha_i)^\beta} - \frac{w^\beta}{(\alpha'_i)^\beta} \right) - \\ \sum_{i=1}^n D_i \left[\left(\alpha'_i \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right)^u - \left(\alpha_i \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right)^u \right] - \\ \sum_{i=1}^n [c_{oi} + c_{ri} (\alpha'_i - \alpha_i)^m] \end{array} \right) \quad (8)$$

$$\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n > 0$$

Analisis untuk mendapatkan solusi model dilakukan dengan pendekatan analitik yaitu pendekatan kalkulus turunan pertama dan kedua dari model untuk memperoleh kondisi perlu dan cukup, sehingga diperoleh nilai parameter desain yang optimal untuk setiap komponen. Kondisi perlu dan cukup dari model secara rinci dapat dilihat pada Lampiran 1. Analisis pada Lampiran 1 memberikan solusi optimal yang bersifat unik dan terhingga.

3.2. Formulasi Model 2: [Dengan Pembatas Investasi]

Tidak seperti pada Model 1 yang mengasumsikan besarnya ongkos investasi tidak terbatas, pada Model 2 besarnya ongkos investasi untuk melakukan peningkatan reliabilitas komponen dibatasi oleh sejumlah ongkos yang diandaikan sebesar M . Dengan demikian bentuk sistem persamaan *non linier programming* dari Model 2 diperlihatkan oleh persamaan (9)

Maksimasi

$$H(\alpha') = \left(\begin{array}{l} \sum_{i=1}^n C_{wi} \left(\frac{w^\beta}{(\alpha_i)^\beta} - \frac{w^\beta}{(\alpha'_i)^\beta} \right) - \\ \sum_{i=1}^n D_i \left[\left(\alpha'_i r \left(1 + \frac{l}{\beta} \right) \right)^u - \left(\alpha_i r \left(1 + \frac{l}{\beta} \right) \right)^u \right] - \\ \sum_{i=1}^n [c_{oi} + c_{ri} (\alpha'_i - \alpha_i)^m] \end{array} \right)$$

dengan kendala:

$$g(\alpha'_i) = \sum_{i=1}^n (c_{oi} + c_{ri} (\alpha'_i - \alpha_i)^m) \leq M$$

$$\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n > 0 \quad (9)$$

Berbeda dengan analisis Model 1, pada Model 2 analisis untuk mendapatkan solusi model dilakukan dengan pendekatan *Lagrange*, karena adanya pembatas ongkos investasi. Analisis secara rinci untuk Model 2 dapat dilihat pada Lampiran 2. Dari Lampiran 2 diperoleh solusi optimal yang bersifat unik dan terhingga.

4. Contoh Numerik

Pada contoh numerik ini, dipertimbangkan produk yang terdiri dari 2 komponen yang disusun seri. Masing-masing komponen memiliki laju kerusakan produk yang bersifat menaik (*increasing failure rate*). Untuk komponen 1 dipilih nilai parameter $\alpha = 2$ dan parameter $\beta = 3$, sementara untuk komponen 2 dipilih nilai parameter $\alpha = 2,5$ dan parameter $\beta = 3$. Hal ini untuk memperoleh laju kerusakan yang berbeda antara komponen 1 dan komponen 2. Dengan model yang dikembangkan diperlihatkan bahwa produk yang terdiri dari beberapa komponen, dengan laju kerusakan komponen yang berbeda, dapat ditentukan parameter desain yang optimal untuk setiap komponen. Nilai parameter lainnya yang digunakan pada contoh numerik Model 1 dan Model 2 diperlihatkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Nilai Parameter

Simbol	Komp. 1	Komp. 2	Satuan
	Nilai	Nilai	
C_w	50.000	200.000	Rp/ kerusakan
D	10.000	25.000	Rp/penambahan <i>reliability</i> /unit
C_o	20.000	50.000	Rp/unit
C_r	10.000	25.000	Rp/penambahan parameter α /unit
w	3		tahun
m	3		
u	2		
ξ	0,5		
M	100.000		Rp/ unit

Berdasarkan nilai parameter yang diberikan pada Tabel 1. dengan menggunakan *Software* MATHCAD 11, diperoleh solusi optimal untuk Model 1 yang dapat dilihat pada Tabel 2. dan solusi untuk Model 2 dapat dilihat pada Tabel 3. Gambar 3 menunjukkan grafik ekspektasi penghematan ongkos garansi selama masa garansi terhadap α'_1 dan α'_2 untuk Model 1. Gambar 4

menunjukkan grafik ekspektasi penghematan ongkos garansi selama masa garansi terhadap α'_1 dan α'_2 untuk Model 2.

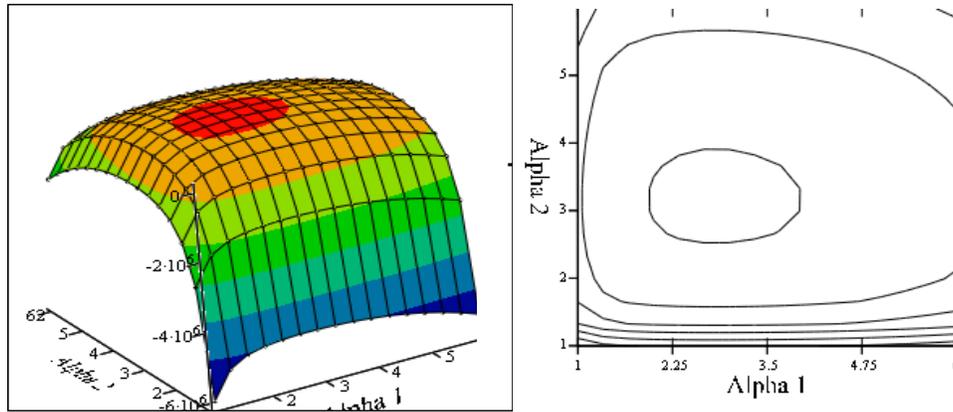
Tabel. 2. Hasil Perhitungan Model 1

Notasi	Nilai	Satuan
α'_1	2,813	
α'_2	3,171	
$E[N(w;\alpha'_1)]$	1,213	Kerusakan / unit
$E[N(w;\alpha'_2)]$	0,847	Kerusakan / unit
$W(\alpha'_1,\alpha'_2)$	284.300	Rp/ unit
$P(\alpha'_1,\alpha'_2)$	107.100	Rp/ unit
$I(\alpha'_1,\alpha'_2)$	82.930	Rp/ unit
$R(\alpha'_1,\alpha'_2)$	0,927	
Ekspektasi Penghematan Ongkos $H(\alpha'_1,\alpha'_2) = \text{Rp. } 94.360/\text{unit}$		

Dari contoh numerik untuk Model 1 dan Model 2 diperoleh $\alpha'_1 > \alpha_1$ dan $\alpha'_2 > \alpha_2$ sehingga memberikan nilai reliabilitas komponen 1 dan 2 yang lebih besar dibandingkan dengan sebelum dilakukan *reliability improvement*. Hal ini juga berdampak pada peningkatan reliabilitas produk secara keseluruhan. Perbandingan hasil antara sebelum *reliability improvement* dan sesudah *reliability improvement* untuk Model 1 dan Model 2 dapat dilihat pada Tabel 4 dan 5.

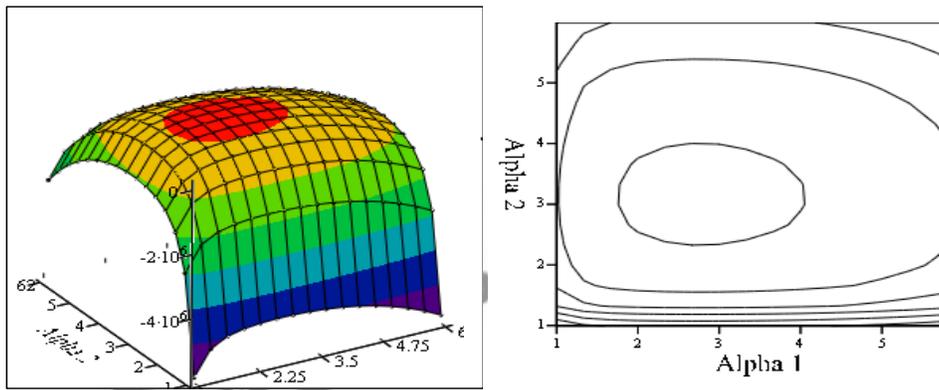
Tabel 3. Hasil Perhitungan Model 2

Notasi	Nilai	Satuan
α'_1	2,759	
α'_2	3,128	
$E[N(w;\alpha'_1)]$	1,286	Kerusakan / unit
$E[N(w;\alpha'_2)]$	0,882	Kerusakan / unit
$W(\alpha'_1,\alpha'_2)$	273.600	Rp/ unit
$P(\alpha'_1,\alpha'_2)$	99.260	Rp/ unit
$I(\alpha'_1,\alpha'_2)$	80.560	Rp/ unit
$L(\alpha'_1,\alpha'_2)$	(-59.720)	Rp/ unit
$R(\alpha'_1,\alpha'_2)$	0,923	
Ekspektasi Penghematan Ongkos $H(\alpha'_1,\alpha'_2) = \text{Rp. } 153.500 /\text{unit}$		



H

Gambar 3. Grafik Penghematan ongkos per unit terhadap α'_1 dan α'_2 untuk Model 1



H

H

Gambar 4. Grafik Penghematan ongkos per unit terhadap α'_1 dan α'_2 untuk Model 2

Tabel 4. Perbandingan Hasil Perhitungan Sebelum dan Sesudah *Reliability Improvement* untuk Model 1

Notasi	Satuan	Sebelum <i>Reliability Improvement</i>	Sesudah <i>Reliability Improvement</i>	% Kenaikan (penurunan)
$E[N(w; \alpha_1)]$	Kerusakan /unit	3,375	1,213	(64,06)
$E[N(w; \alpha_2)]$	Kerusakan /unit	1,728	0,847	(50,98)
$E_s[N(w; \alpha_1, w; \alpha_2)]$	Kerusakan /unit	5,103	2,06	(59,63)
$W(\alpha_1, \alpha_2)$	Rp/ unit	514.400	230.000	(55,29)
$R(\alpha_1)$		0,882	0,956	8,39
$R(\alpha_2)$		0,938	0,969	3,30
$R_s(\alpha_1, \alpha_2)$		0,828	0,927	11,96

Tabel 5. Perbandingan Hasil Perhitungan sebelum dan sesudah *Reliability Improvement* untuk Model 2

Notasi	Satuan	Sebelum <i>Reliability Improvement</i>	Sesudah <i>Reliability Improvement</i>	% Kenaikan (penurunan)
$E[N(w;\alpha_1)]$	Kerusakan /unit	3,375	1,286	(61,90)
$E[N(w;\alpha_2)]$	Kerusakan /unit	1,728	0,882	(48,96)
$E_s[N(w;\alpha_1, w;\alpha_2)]$	Kerusakan /unit	5,103	2,168	(57,52)
$W(\alpha_1, \alpha_2)$	Rp/ unit	514.400	240.700	(53,21)
$R(\alpha_1)$		0,882	0,954	8,16
$R(\alpha_2)$		0,938	0,968	3,20
$R_s(\alpha_1, \alpha_2)$		0,828	0,923	11,47

5. Kesimpulan

Pada penelitian ini telah dikembangkan model peningkatan reliabilitas produk melalui peningkatan reliabilitas komponennya, untuk produk yang dijual dengan garansi. Dari contoh numerik dapat diperoleh hasil sebagai berikut:

- Model yang dikembangkan mampu menjawab permasalahan yang berkaitan dengan peningkatan reliabilitas produk melalui peningkatan reliabilitas komponennya, sehingga dapat ditentukan nilai parameter desain (α') yang optimal untuk setiap komponen, yang dapat memberikan penghematan total ongkos per unit selama masa garansi.
- *Reliability improvement* yang dilakukan dapat mengurangi jumlah kerusakan selama masa garansi, sehingga dapat menurunkan ongkos garansi.
- *Reliability improvement* yang dilakukan terhadap komponen produk dapat meningkatkan reliabilitas produk secara keseluruhan.

Pada penelitian ini pengembangan model yang dilakukan hanya mempertimbangkan dari pihak produsen. Klaim akibat kerusakan produk dapat memberikan dampak kerugian bagi pihak konsumen, sehingga untuk penelitian lebih lanjut dapat dikembangkan model yang mempertimbangkan juga kepentingan pihak konsumen, misalnya dengan mempertimbangkan ongkos ketidakpuasan konsumen karena kerusakan produk. Selain itu pada penelitian ini pengembangan model hanya mempertimbangkan komponen dengan rangkaian seri, untuk penelitian lebih lanjut dapat dipertimbangkan komponen dengan rangkaian parallel.

DAFTAR PUSTAKA

1. Baik, J., Murthy D. N. P., Jack, N. (2004), Two-Dimensional Failure Modelling with Minimal Repair, *Naval Research Logistics*, Vol. 51, 345-362.
2. Blischke, W. R. dan Murthy D.N.P., (1994), *Warranty Cost Analysis*, Marcel Dekker Inc., New York.
3. Hussain, A. Z. M. O. and Murthy, D. N. P. (2000), Warranty and Optimal Redudancy with Uncertain Quality, *Mathematical and Computer Modelling*, 31, 175-182.
4. Hussain, A. Z. M. O. and Murthy, D. N. P. (2003), Warranty and Optimal Reliability Improvement Through Product Development, *Mathematical and Computer Modelling*, 38, 1211-1217.
5. Lewis E. E. (1994), *Introduction to Reliability Engineering*, John Wiley & Sons, Inc. Evanstone, Illionis.
6. Liu, Zhi-Jie, Huang, Hong-Zong, Murthy, D. N. P. (2006), Optimal Reliability and Price Choises for Products Under Warranty, *IEEE*.

7. Murthy, D. N. P. and Djameludin, I. (2002), New Product Warranty: A Literature Review, *International Journal Production Economics*, 79, 231-260.
8. Murthy, D.N. P., Bulmer, Michael, Eccleston, John A.,(2004), Weibull Model Selection for Reliability Modelling, *Reliability Engineering and System Safety*, 86, 257-267.
9. Murthy, D. N. P., (2006), Product Warranty and Reliability, *Ann Operation Research*, 143, 133-146.
10. Prasetiyo, Hendro (2006), *Optimisasi Parameter Desain Untuk Produk yang Dijual Dengan Garansi Dua Dimensi*, Tesis S-2, Teknik Industri ITB, Bandung.
11. Saroso, D. S. (2003), *Product Quality Improvement: A System Approach*, Disertasi S-3, The Division of Mechanical Engineering University of Queensland, Australia.
12. Taha H.A., (1997), *Operational Research An Introduction*, Sixth Edition, Prantice-Hall International, Inc. New Jersey.
13. Thomas, Marlin U. and Richard, Jean-Philippe P. (2006), Warranty-based Method for Establishing Reliability Improvement Target, *IIE Transactions*, 38, 1049-1058.
14. Wolstenholme, Linda (1999), *Reliability Modelling: Statistical approach*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida.
15. Yeh, Ruey Huei, Chen, Chen, Ming-Yuh, Lin, Chen-Yi, (2007), Optimal periodic Replacement Policy for Repairable Products Under Free-Repair Warranty, *European Journal of Operational Research*, 176, 1678-1686.
16. Huang, Hong-Zong, Liu, Zhi-Jie, Murthy, D. N. P. (2007), Optimal Reliability, Warranty and Price for New Products, *IIE Transaction*, 39, 819-8

Lampiran 1: Penjelasan Analisis Model 1

Untuk menjelaskan analisis Model I, pada penelitian ini diberikan contoh produk yang terdiri dari 2 komponen yang dirangkai secara seri. Persamaan fungsi tujuan untuk 2 komponen ditunjukkan pada persamaan berikut:

$$Max. H(\alpha'_1, \alpha'_2) = \left(\begin{array}{l} c_{w1} \left(\frac{w^{\beta_1}}{(\alpha_1)^{\beta_1}} - \frac{w^{\beta_1}}{(\alpha'_1)^{\beta_1}} \right) + c_{w2} \left(\frac{w^{\beta_2}}{(\alpha_2)^{\beta_2}} - \frac{w^{\beta_2}}{(\alpha'_2)^{\beta_2}} \right) - \\ \left(D_1 \left(\left(\alpha'_1 \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \right)^u - \left(\alpha_1 \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \right)^u \right) + \right. \\ \left. D_2 \left(\left(\alpha'_2 \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta_2} \right) \right)^u - \left(\alpha_2 \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta_2} \right) \right)^u \right) \right) - \\ \left((c_{o1} + c_{r1}(\alpha'_1 - \alpha_1)^m) + (c_{o2} + c_{r2}(\alpha'_2 - \alpha_2)^m) \right) \end{array} \right)$$

Turunan parsial dari persamaan fungsi maksimasi diatas terhadap variabel α'_1 dinyatakan oleh persamaan berikut:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha'_1} H = 0 = \frac{C_{w1} w^{\beta_1} \beta_1}{(\alpha'_1)^{\beta_1+1}} - D_1 u (\alpha'_1)^{u-1} \left(\Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right)^u - C_{r1} m (\alpha'_1 - \alpha_1)^{m-1}$$

Turunan parsial dari persamaan fungsi maksimasi diatas terhadap variabel α'_2 dinyatakan oleh persamaan berikut:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha'_2} H = 0 = \frac{C_{w2} w^{\beta_2} \beta_2}{(\alpha'_2)^{\beta_2+1}} - D_2 u (\alpha'_2)^{u-1} \left(\Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right)^u - C_{r2} m (\alpha'_2 - \alpha_2)^{m-1}$$

Kedua persamaan turunan diatas merupakan persamaan implisit sehingga sulit untuk menentukan nilai α'_1 dan α'_2 yang optimal. Namun untuk mengetahui bahwa persamaan fungsi tujuan memiliki solusi optimal, dapat diketahui melalui kondisi cukup dari fungsi persamaan.

Kondisi cukup untuk mengetahui bahwa nilai optimal α'_1 dan α'_2 ada pada fungsi $H(\alpha'_1, \alpha'_2)$, diperoleh jika seluruh determinan matriks *Hessian* ($\nabla^2 H(\alpha'_1, \alpha'_2)$) adalah definit negatif atau semidefinit negatif. Determinan matriks *Hessian* ($\nabla^2 H(\alpha'_1, \alpha'_2)$) untuk Model 1 adalah:

$$\nabla^2 H(\alpha'_1, \alpha'_2) = \begin{vmatrix} \frac{-C_{w1}\beta_1(\beta_1+1)w^{\beta_1}}{(\alpha'_1)^{\beta_1+2}} - D_1u(u-1)(\alpha'_1)^{u-2} \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta_1}\right) \right)^u + C_{r1}m(m-1)(\alpha'_1-\alpha_1)^{m-2} & 0 \\ 0 & \frac{-C_{w2}\beta_2(\beta_2+1)w^{\beta_2}}{(\alpha'_2)^{\beta_2+2}} - D_2u(u-1)(\alpha'_2)^{u-2} \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta_2}\right) \right)^u + C_{r2}m(m-1)(\alpha'_2-\alpha_2)^{m-2} \end{vmatrix}$$

Nilai parameter C_{w1} , C_{w2} , w , β_1 , β_2 , α'_1 , α'_2 adalah positif, u dan $m > 2$ dan $\alpha'_1 > \alpha_1$, $\alpha'_2 > \alpha_2$, sehingga Determinan dari *leading principal minor* $D_1 < 0$ yang berarti definit negatif. Demikian juga dengan Determinan dari *leading principal minor* $D_2 > 0$, yang berarti definit positif. Dari nilai $\text{Det } D_1 < 0$ dan $\text{Det } D_2 > 0$ memperlihatkan bahwa fungsi tujuan adalah set cekung (*concave*), dan terdapat titik optimal dari fungsi $H(\alpha'_1, \alpha'_2)$.

Lampiran 1: Penjelasan Analisis Model 2

Untuk analisis Model 2, persamaan *non linier* yang memiliki persamaan fungsi kendala dapat digunakan metoda pendekatan *Lagrange* untuk mengidentifikasi titik stasioner. Pada metoda pendekatan *Lagrange*, fungsi yang memiliki fungsi kendala persamaan (*bounded*) dirubah menjadi fungsi yang tidak memiliki fungsi kendala persamaan (*unbounded*). Persamaan *Lagrangean* untuk persamaan fungsi tujuan dapat dilihat pada persamaan berikut dengan ξ sebagai koefisien *Lagrange*:

$$\text{Max. } L(\alpha'_1, \alpha'_2, \xi) = \begin{pmatrix} \left[c_{w1} \left(\frac{w^{\beta_1}}{(\alpha'_1)^{\beta_1}} - \frac{w^{\beta_1}}{(\alpha_1)^{\beta_1}} \right) + c_{w2} \left(\frac{w^{\beta_2}}{(\alpha'_2)^{\beta_2}} - \frac{w^{\beta_2}}{(\alpha_2)^{\beta_2}} \right) \right] - \\ \left[D_1 \left(\left(\alpha'_1 \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta_1}\right) \right)^u - \left(\alpha_1 \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta_1}\right) \right)^u \right) + \right. \\ \left. D_2 \left(\left(\alpha'_2 \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta_2}\right) \right)^u - \left(\alpha_2 \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta_2}\right) \right)^u \right) \right] - \\ \left[(c_{o1} + c_{r1}(\alpha'_1 - \alpha_1)^m) + (c_{o2} + c_{r2}(\alpha'_2 - \alpha_2)^m) \right] - \\ \xi \left[(c_{o1} + c_{r1}(\alpha'_1 - \alpha_1)^m) + (c_{o2} + c_{r2}(\alpha'_2 - \alpha_2)^m) - M \right] \end{pmatrix}$$

Untuk persamaan *Lagrangean* perlu dilakukan uji kecekungan dari fungsi pembatas, untuk mengetahui bahwa solusi optimal berada pada himpunan set dari fungsi tujuan. Berdasarkan kondisi keoptimalan *Karush-Kuhn-Tucker*, maka Model 2 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \xi &\geq 0, \\ \left(\frac{\partial H(\alpha'_1, \alpha'_2)}{\partial \alpha'_1}, \frac{\partial H(\alpha'_1, \alpha'_2)}{\partial \alpha'_2} \right) - \xi \left(\frac{\partial g(\alpha'_1, \alpha'_2)}{\partial \alpha'_1}, \frac{\partial g(\alpha'_1, \alpha'_2)}{\partial \alpha'_2} \right) &= 0, \\ \xi g(\alpha'_1, \alpha'_2) &= 0, \\ g(\alpha'_1, \alpha'_2) &\leq 0 \end{aligned}$$

Substitusi dari masing-masing fungsi turunan maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{C_{w1} w^{\beta_1} \beta_1}{(\alpha'_1)^{\beta_1+1}} - D_1 u (\alpha'_1)^{u-1} \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta_1}\right) \right)^u - C_{r1} m (\alpha'_1 - \alpha_1)^{m-1} - \xi C_{r1} m (\alpha'_1 - \alpha_1)^{m-1} &= 0 \\ \frac{C_{w2} w^{\beta_2} \beta_2}{(\alpha'_2)^{\beta_2+1}} - D_2 u (\alpha'_2)^{u-1} \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta_2}\right) \right)^u - C_{r2} m (\alpha'_2 - \alpha_2)^{m-1} - \xi C_{r2} m (\alpha'_2 - \alpha_2)^{m-1} &= 0 \\ \xi \left((c_{o1} + c_{r1}(\alpha'_1 - \alpha_1)^m) + (c_{o2} + c_{r2}(\alpha'_2 - \alpha_2)^m) - M \right) &= 0 \end{aligned}$$

Dengan 3 sistem persamaan dan 3 variabel yang dicari, maka dengan penyelesaian secara simultan akan diperoleh variabel α'_1 , α'_2 dan ξ yang unik. Dengan diperoleh variabel α'_1 , α'_2 dan ξ , maka fungsi tujuan berarti fungsi *concave* dan fungsi pembatas adalah fungsi *convex*, dengan demikian maka fungsi *Lagrangean* juga merupakan fungsi *concave*.

Kondisi cukup untuk mengetahui bahwa nilai optimal α'_1 dan α'_2 ada pada fungsi *Lagrangean* maka *bordered Hessian Matrix* dari fungsi $L(\alpha'_1, \alpha'_2, \xi)$ adalah:

$$H^B = \begin{bmatrix} 0 & C_{r1}m(\alpha'_1 - \alpha_1)^{m-1} & C_{r2}m(\alpha'_2 - \alpha_2)^{m-1} \\ C_{r1}m(\alpha'_1 - \alpha_1)^{m-1} & \frac{-C_{w1}w^{\beta_1} \beta_1 (\beta_1 + 1)}{(\alpha'_1)^{\beta_1 + 2}} - K_3 & 0 \\ C_{r2}m(\alpha'_2 - \alpha_2)^{m-1} & 0 & \frac{-C_{w2}w^{\beta_2} \beta_2 (\beta_2 + 1)}{(\alpha'_2)^{\beta_2 + 2}} - K_4 \end{bmatrix}$$

dimana:

$$K_3 = \begin{pmatrix} D_1 u(u-1)(\alpha'_1)^{u-2} \left(\Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right)^u + C_{r1}m(m-1)(\alpha'_1 - \alpha_1)^{m-2} + \\ \xi C_{r1}m(m-1)(\alpha'_1 - \alpha_1)^{m-2} \end{pmatrix} \quad K_4 = \begin{pmatrix} D_2 u(u-1)(\alpha'_2)^{u-2} \left(\Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right)^u + C_{r2}m(m-1)(\alpha'_2 - \alpha_2)^{m-2} + \\ \xi C_{r2}m(m-1)(\alpha'_2 - \alpha_2)^{m-2} \end{pmatrix}$$

Titik optimal untuk fungsi maksimasi akan diperoleh, apabila dimulai dari *principal major* pertama dari determinan, *principal minor* yang terakhir dari H^B bertanda $(-1)^{m+1}$. Dalam kasus yang dibahas jumlah persamaan pembatasnya adalah 1, sehingga $(-1)^{1+1}$ adalah positif. Karena nilai parameter C_{w1} , C_{w2} , w , β_1 , β_2 , α'_1 , α'_2 adalah positif, u dan $m > 2$ dan $\alpha'_1 > \alpha_1$, $\alpha'_2 > \alpha_2$, $0 < \xi < 1$, $K_3, K_4 > 0$ maka $\text{Det } H^B > 0$ yang berarti $\text{Det } H^B$ bertanda positif.

