LAPORAN PENELITIAN

ENUMERASI DARI POHON

Oleh :

Kania Sawitri, S.Pd.,M.Si.

INSTITUT TEKNOLOGI NASIONAL

2003

LEMBAR PENGESAHAN

ENUMERASI DARI POHON

Bandung, Mei 2003

Kepala UPT-MKU Institut Teknologi Nasional

R. Hari Adianto, Drs., MT.

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah, akhirnya penulis dapat menyelesaikan laporan penelitian ini. Laporan penelitian ini berjudul ENUMERASI DARI POHON, disusun sebagai prasyarat untuk jabatan akademik.

Enumerasi dari pohon merupakan salah satu bagian dari enumerasi dari graf dan termasuk dalam lingkungan teori graf. Enumerasi dari pohon kebanyakan sebagai gambaran dalam menghitung pohon berakar baik yang berlabel maupun tanpa label dan memperkenalkan beberapa teknik enumerasi.

Dengan terselesaikannya laporan penelitian ini, penulis ingin menyampaikan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada yang terhormat:

1. Bapak R. Hari Adianto, Drs., MT., Ketua UPT-MKU Institut Teknologi Nasional.
2. Bapak Bali Widodo, SH.,M.Si., Sekretaris UPT-MKU Institut Teknologi Nasional.
3. Kepada semua pihak yang telah membantu kelancaran pembuatan laporan penelitian ini.

Semoga laporan penelitian ini dapat memberi masukan yang berarti bagi perkembangan ilmu pengetahuan, khususnya dalam bidang matematika serta dapat menjadi awal dari laporan-laporan ilmiah selanjutnya.

Bandung, Mei 2003

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

Salah satu yang dipelajari dalam Matematika adalah tentang Matematika Diskrit, yang didalamnya mempelajari tentang teori graf. Teori graf sangat berguna untuk mengembangkan model-model berstruktur dalam berbagai situasi. Struktur-struktur yang terdiri atas kumpulan objek-objek yang berkaitan satu sama lain dapat dibuat modelnya dengan sebuah graf.

Walaupun graf telah dipelajari orang sejak dulu, penggunaan teknologi komputer yang makin bertambah telah membangkitkan minat baru untuk mempelajari graf. Aplikasi graf tidak hanya telah ditemukan dalam sains komputer, melainkan juga di bidang lainnya seperti dalam bisnis dan sains. Sebagai konsekuensinya, studi tentang graf menjadi penting bagi banyak orang.

Dalam teori graf telah dipelajari tentang konsep dasar teori graf, pohon dan enumerasi dari pohon. Enumerasi dari pohon merupakan salah satu bagian dari enumerasi dari graf. Enumerasi dari pohon sebagai gambaran dalam menghitung pohon berlabel maupun tanpa label dengan menggunakan fungsi pembangkit dan beberapa cara enumerasi lainnya.

BAB II

MATERI PRASYARAT

Beberapa materi yang perlu diketahui terlebih dahulu sebelum mempelajari enumerasi dari pohon antara lain:

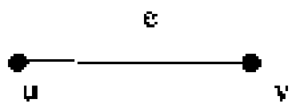
1. Definisi Graf

Untuk memahami teori graf kita perlu mengetahui beberapa notasi dan terminologi yang digunakan.

Sebuah graf G adalah sebuah himpunan terhingga yang tak kosong yang memuat objek-objek (disebut titik/vertek), dan kumpulan pasangan tak urut antara titik-titik yang berlainan, yang disebut sisi. Himpunan titik dari graf G ditulis dengan V(G). Himpunan sisi dari G dinyatakan dengan E(G).

Graf dapat dinyatakan dengan diagram. Tiap titik digambarkan dengan sebuah noktah atau lingkaran kecil dan tiap sisi dinyatakan dengan segmen garis atau kurva yang menghubungkan 2 titik yang berlainan.

Jika u dan v adalah titik-titik pada graf G, maka sebuah sisi e = (u,v) dikatakan menghubungkan titik u dan v. Disebut juga titik u berdekatan/ajasen dengan titik v. Perhatikan gambar berikut:

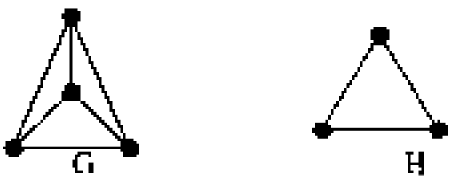


2. Graf Bagian

H adalah subgraf atau graf bagian dari graf G, jika setiap titik H merupakan titik G dan setiap sisi H juga merupakan sisi dari G. Notasinya adalah $H \subseteq G$.

Contoh:

Pada gambar berikut H adalah graf bagian dari G.



3. Derajat Titik

Derajat sebuah titik V pada Graf G, yang dinyatakan dengan $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi pada G yang insiden terhadap v. Derajat minimum dari graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ dan derajat maksimumnya ditulis dengan $\Delta(G)$.

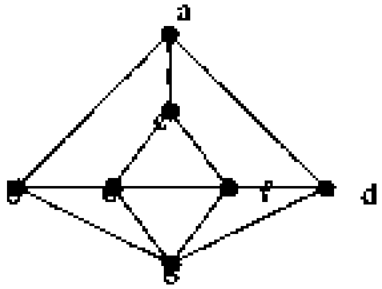
Pada graf dibawah ini dapat kita ketahui bahwa

$deg_G(a) = deg_G(b) = deg_G(c) = deg_G(d) = 3$

$deg_G(e) = deg_G(f) = deg_G(g) = 4$

sedangkan

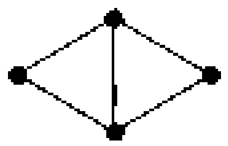
$\delta(G) = 3$ dan $\Delta(G) = 4$



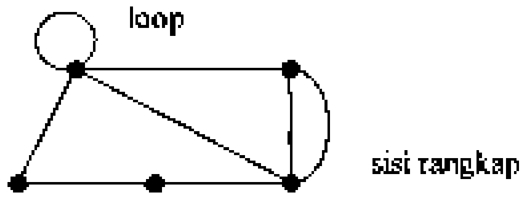
4. Graf Sederhana

Graf sederhana adalah graf yang tak mengandung sisi rangkap dan loop.

Contoh:



Graf Sederhana



Graf tak Sederhana

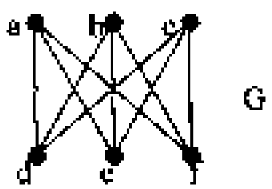
Teorema:

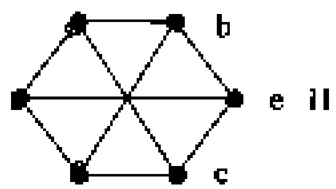
Misal $\varepsilon = |E(G)|$ dan $v = |V(G)|$. Jika G graf sederhana maka $\varepsilon \leq \binom{v}{2}$.

5. Graf Isomorfik

Sebuah graf G disebut isomorfik terhadap graf H jika terdapat pemetaan satu-satu ϕ (yang disebut isomorfisme dari V(G) pada V(H) demikian sehingga ϕ menjaga ajasensi). Jadi $(u,v) \in E(G)$ jika hanya jika $(\phi(u), \phi(v)) \in E(H)$. Jika G isomorfik terhadap H, kita tulis $G \cong H$.

Dalam contoh pada gambar berikut, G isomorfik terhadap H.



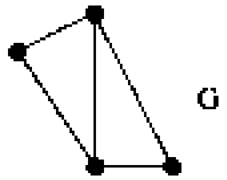


4

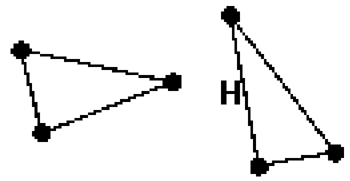
6. Graf Terhubung

Sebuah graf disebut terhubung jika graf tersebut hanya terdiri dari satu bagian (satu komponen). Komponen dari G ditulis $\omega(G)$.

Contoh:



G adalah graf terhubung

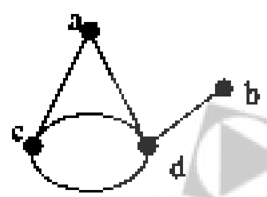


H adalah graf tak terhubung

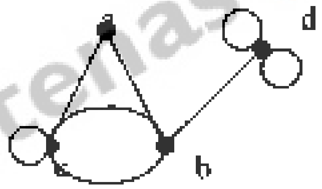
7. Barisan Derajat

Derajat titik dari suatu graf dapat dinyatakan dalam suatu barisan yang tidak naik.

Contoh:



Barisan titiknya: 4,3,2,1.

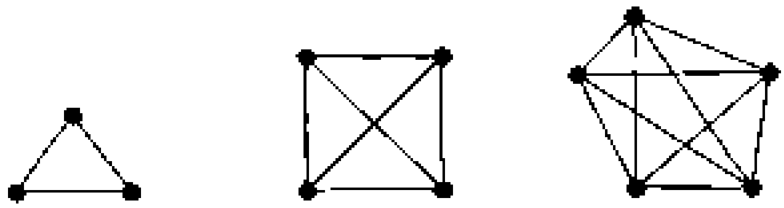


Barisan titiknya: 5,5,4,2.

8. Graf Lengkap

Sebuah graf G disebut graf lengkap jika setiap titiknya ajasen dengan semua titik lainnya pada G. Graf lengkap yang berordo n dinotasikan dengan k_n. Pada sebuah graf lengkap berlaku $E(G) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ dengan n adalah jumlah titik.

Contoh:

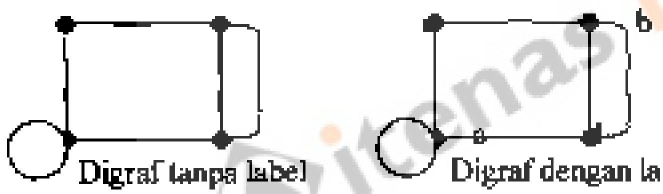


k_3 k_4 k_5

9. Graf Berarah dan Graf Berlabel

Graf berarah adalah himpunan yang mempunyai elemen titik dan pasangan terurut antara dua titik yang disebut busur. Himpunan titik dinotasikan dengan V(G) dan himpunan busur dinotasikan dengan A(G).

Contoh:



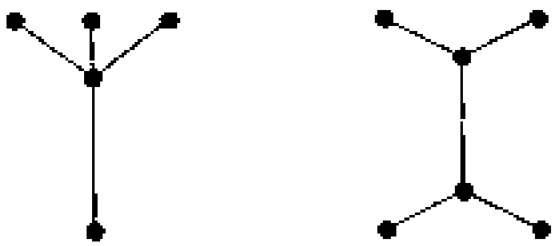
Digraf tanpa label Digraf dengan label

10. Pohon

Graf terhubung yang tak mengandung siklus dinamakan pohon.

Contoh :

Pohon yang terdiri atas 5 titik dan 6 titik



Dalam setiap pohon berlaku :

a. Setiap pohon dengan $n \geq 2$ titik mempunyai paling sedikit 2 titik monovalen (titik berderajat 1)

b. Jika titik monovalen dan sisi insiden dihapus dari pohon, diperoleh graf masih pohon.

c. Diberikan pohon T, jika kita memasukkan titik baru x dan sisi baru berhubungan dengan e ke suatu titik dari T, graf baru juga merupakan pohon.

II. Pohon berakar

Pohon berakar adalah graf berarah (digraf) T yang memenuhi dua syarat:

a. Bila arah sisi-sisi pada T diabaikan, hasil graf tidak berarahnya merupakan sebuah pohon, dan

b. Ada titik R sedemikian hingga derajat masuk R adalah 0 dan derajat masuk sembarang titik lainnya adalah 1.

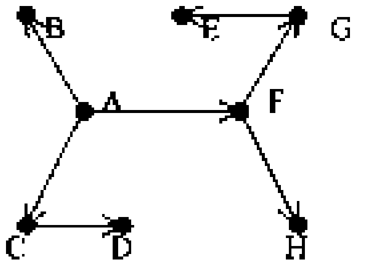
Titik R ini disebut akar dari pohon berakar itu.

Contoh:

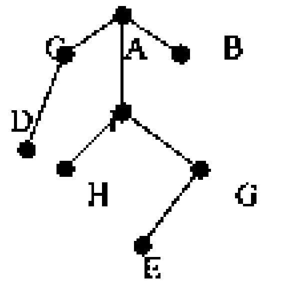
Graf pada gambar a adalah pohon berakar dengan akar A, karena

1. bila arah pada sisinya diabaikan, graf hasilnya merupakan pohon, dan
2. A berderajat masuk 0, dan semua titik lain berderajat masuk 1.

Cara biasa untuk menggambarkan graf itu ditunjukkan pada gambar b.



Gambar a.



Gambar b

12. Persamaan Binomial Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \qquad n \text{ bilangan bulat positif.}$$

13. Deret Maclaurin

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad , |x| < 1.$$

BAB III

ENUMERASI DARI POHON

A. TIPE-TIPE DARI ENUMERASI

Semua masalah enumerasi graf tergolong dalam 2 kategori:

1. Menghitung banyaknya graf berarah dari tipe-tipe tertentu.

   Contoh: Semua graf terhubung.

   Graf sederhana dengan 8 titik.

2. Menghitung banyaknya graf bagian dari tipe-tipe khusus yang diberikan graf G, sedemikian hingga banyaknya lintasan sisi tak terhubung dengan panjang k antara titik a dan b dalam G.

Tipe kedua dari masalah biasa termasuk gambaran matriks dari graf G dan memanipulasi dari matriks tersebut. Maka permasalahannya, sering ditemukan pada aplikasi praktis, tak ada variasi dan hal yang menarik seperti kategori pertama. Kita tidak akan mempermasalahkan hal tersebut di bab ini.

Permasalahan dari tipe 1 ialah pada kata "perbedaan/beda" yang mungkin penting dan harus dimengerti sejelas-jelasnya. Jika graf berlabel (antara lain masing-masing titik bertanda/ditandai sebuah nama berbeda dengan yang lainnya), maka semua graf dapat dihitung. Di lain pihak, dalam kasus graf tak berlabel kata "beda" berarti non isomorfik dan setiap himpunan graf isomorfik dapat dihitung menjadi satu.

Sebagai contoh, kita tentukan permasalahan mengenai kontruksi semua graf sederhana dengan n titik dan e sisi. Maka terdapat n(n-1)/2 pasangan tak terurut dari titik. Jika kita lihat titik-titik yang berbeda nama dari yang lain (antara lain pada graf berlabel) maka ada

$$\binom{\frac{n(n-1)}{2}}{e} \qquad (1)$$

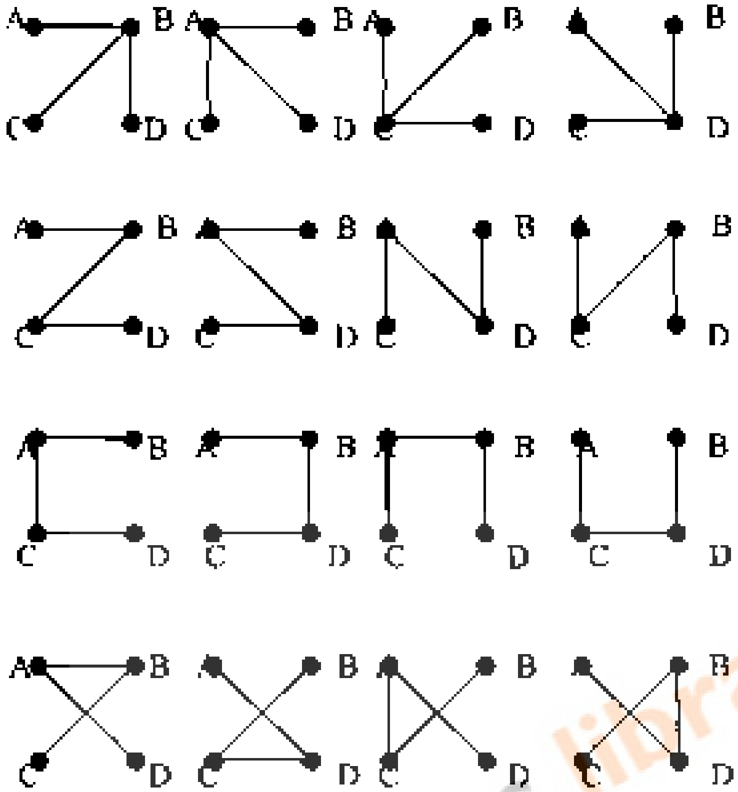
cara memilih e sisi ke bentuk graf. Sehingga pernyataan (1) menentukan banyaknya graf berlabel sederhana dengan n titik dan e sisi.

Beberapa graf demikian, adalah isomorfik (dari persepsi yang sama untuk setiap tanda di setiap titik). Sedemikian hingga banyaknya graf tak berlabel sederhana dengan n titik dan e sisi harus lebih kecil dari pernyataan (1).

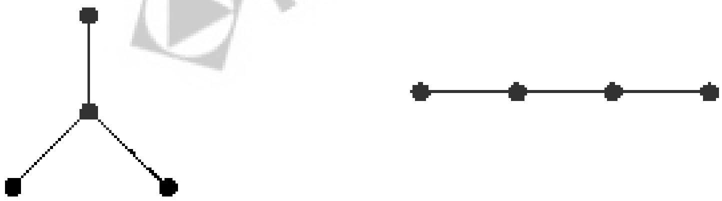
Diantara kumpulan graf, isomorfis adalah relasi ekuivalen. Banyaknya graf tanpa label berbeda (dari tipe tertentu) sama dengan banyaknya kelas ekuivalen, dalam isomorfis, dari graf berlabel.

Contoh:

Kita memiliki 16 pohon berlabel berbeda dari empat titik (gambar 1). Dan gambar tersebut masuk ke dua kelas ekuivalen yang bersifat isomorfis. Pada gambar tersebut 4 pohon di barisan puncak termasuk pada satu kelas ekuivalen dan sisanya 12 termasuk pada kelas yang lain. Maka kita memiliki dua pohon tak berlabel yang berbeda dari empat titik (gambar 2).



Gambar 1
16 pohon berlabel dari 4 titik



Gambar 2
Pohon tanpa label dengan 4 titik

TEOREMA 1

Banyaknya graf berlabel sederhana dari n titik adalah $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (2)

Bukti :

Misalkan n banyaknya titik dan e banyaknya sisi. Pada graf sederhana dengan n titik berlaku $e \le \frac{1}{2}n(n-1)$. Berarti graf sederhana berlabel dengan n titik, banyaknya sisi adalah 0, 1, 2, 3, ... , $\frac{1}{2}n(n-1)$. Berdasarkan pernyataan (1), maka banyaknya graf sederhana berlabel dengan n titik dan 0, 1, 2, 3, ... , $\frac{1}{2}n(n-1)$ sisi adalah

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{\frac{1}{2}n(n-1)} \qquad (3)$$

Dengan menggunakan identitas berikut

$$\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\binom{k}{3}+\cdots+\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}=2^k$$

maka diperoleh

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{\frac{1}{2}n(n-1)}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Sehingga membuktikan teorema.

B. MENGHITUNG POHON BERLABEL

Pernyataan (1) dapat digunakan untuk memperoleh banyaknya graf sederhana dengan n titik dan n-1 sisi. Beberapa diantaranya menjadi sebuah pohon dan yang lainnya menjadi graf tak terhubung dengan sirkuit. Kita buktikan teorema 2 yang memberikan banyaknya pohon.

TEOREMA 2

Banyaknya pohon berlabel dengan n titik adalah n^{n-2} (dengan n ≥ 2).

Bukti:

Misalkan N' himpunan dari semua (n-2) tupel dari N = {1, 2, 3, ... , n}. Masing-masing unsur dalam N' mempunyai (n-2) komponen dan masing-masing komponen dapat dipilih dengan n cara, maka anggota dari N' adalah n^{n-2}. Teorema ini terbukti jika kita menentukan korespondensi satu-satu antara N' dan himpunan dari pohon berlabel berlainan dengan n titik.

(⇒) Misalkan T suatu pohon berlabel dengan n titik, dan misalkan W adalah himpunan dari titik di T berderajat 1. Susun unsur-unsur dari W dalam urutan naik dan misal w_1 adalah unsur pertama dalam W. Misal s_1 titik tunggal yang ajasen ke w_1. Kemudian, misal T' adalah pohon yang dapat menghapus w_1 dari T, dan misal W' adalah himpunan titik berderajat 1 pada T' yang menyusun urutan naik. Jika w_2 adalah unsur pertama dalam W', s_2 sebagai titik tunggal yang ajasen ke w_2 dalam T'. Kita lanjutkan proses hingga kita dapat (n-2) tupel s dari bentuk $(s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad \cdots \quad s_{n-2})$ yang menentukan bahwa setiap pohon berlabel sesuai dengan unsur tunggal dalam N'.

(⇐) Akan ditunjukkan bahwa setiap (n-2) tupel s menyatakan pohon berlabel tunggal dengan n titik. Jika $s = (s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad \cdots \quad s_{n-2})$ kita nyatakan bahwa

v_1 : unsur pertama dalam N yang bukan dalam s

v_2 : unsur pertama dalam N-{v_1} yang bukan dalam s-{s_1}

v_3 : unsur pertama dalam N-{v_1,v_2} yang bukan dalam s-{s_1,s_2}

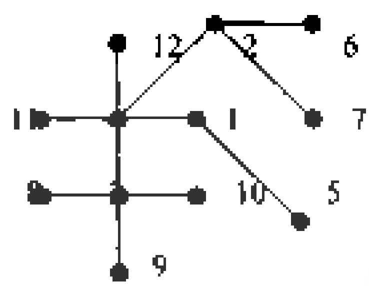
Kita ulangi proses ini hingga kita peroleh v_i (i = 1, 2, 3, ... , n-2). Kedua sisa unsur dalam N dinyatakan dengan x dan y. Sekarang bentuk sebuah graf yang mempunyai himpunan titik N untuk sisi dimana (n-2) sisi penghubung s_i dan v_i

dan sisi penghubung x dan y. Graf kemudian didapat pohon berlabel tunggal yang sesuai dengan s.

Kemudian korespondensi satu-satu antara N' dan himpunan dari pohon berlabel berlainan dengan n titik menentukan bukti teorema.

Contoh :

Misalkan kita mendapat 10 tupel dari pohon berlabel T dengan 12 titik sebagai diperlihatkan pada gambar 3.



Gambar 3

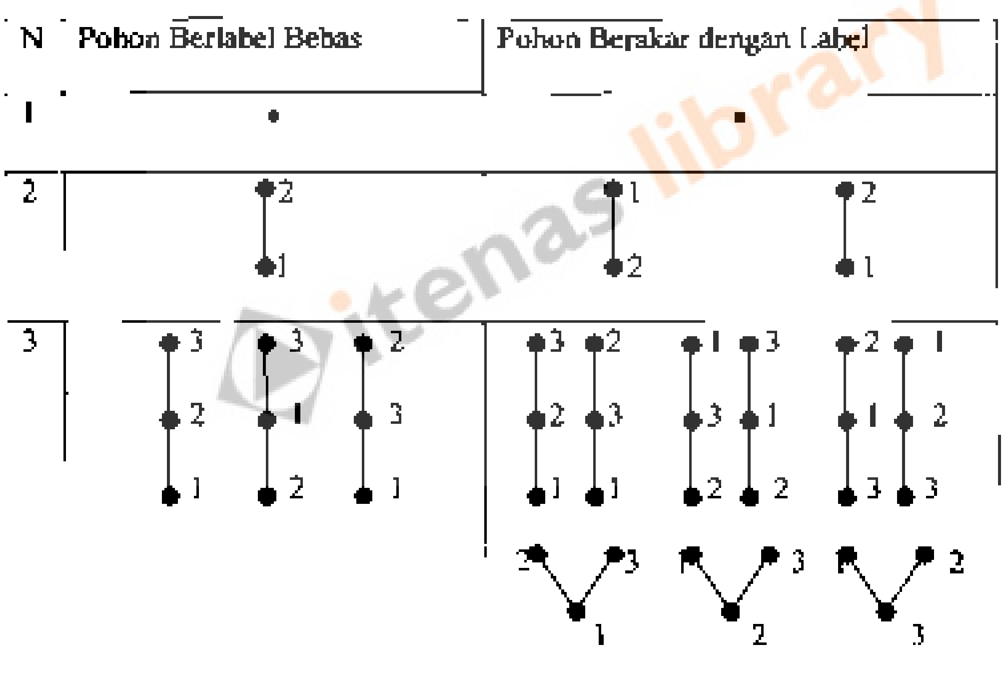
W = { 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} dan s_1 adalah titik ajasen ke unsur pertama dalam W. Penghapusan titik 5 dari T dan sisi penghubung 1 dan 5 didapat pohon T' yang mana W' adalah himpunan dari semua titik berderajat 1, susunan dalam urutan naik. Unsur pertama dalam W' adalah 1, s_2 adalah 4. Kemudian hapus titik 1 dan sisi penghubung 1 dan 4. Titik pertama berderajat 1 dalam pohon baru adalah 6, yang mana adalah ajasen dengan 2. Kemudian s_3 adalah 2. Kita lanjutkan hal yang sama dan tinjau bahwa $s_4 = 2$, $s_5 = 4$, $s_6 = 3$, $s_7 = 3$, $s_9 = 4$, dan $s_{10} = 4$. Kemudian pohon berlabel T sesuai dengan 10 tupel (1 4 2 2 4 3 3 3 4 4).

Jika s = (1 4 2 2 4 3 3 3 4 4) maka n = 12 dan N = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Kemudian v_1 = unsur pertama dalam N yang bukan s, maka $v_1 = 5$. Kemudian v_2 =

unsur pertama dalam N-{5} yang bukan s-{1}, maka $v_2=1$. Lanjutkan kita peroleh $v_3 = 6$, $v_4 = 7$, $v_5 = 2$, $v_6 = 8$, $v_7 = 9$, $v_8 = 10$, $v_9 = 3$, dan $v_{10} = 11$. Terakhir $x=4$ dan $y=12$. Sekarang bentuk graf dengan himpunan titik N dan sisi penghubung s_i dan v_i (i = 1, 2, 3, … , 10) dan sisi penghubung x dan y. Graf yang didapat adalah pohon berlabel dalam gambar 3.

Pohon berakar dengan label: Dalam graf berakar 1 titik ditandai sebagai akar. Untuk masing-masing dari n^{n-2} pohon berlabel kita dapat memiliki n pohon berakar dengan label, karena salah satu dari n titik dapat dibuat menjadi akar.

Semua pohon berakar untuk n=1, 2, dan 3 diberikan pada Gambar 4.



C. MENGHITUNG POHON TANPA LABEL

Masalah enumerasi dari pohon tanpa label lebih sulit dan lebih dikenal dengan konsep fungsi pembangkit dan partisi.

FUNGSI PEMBANGKIT

Satu dari banyaknya kegunaan peralatan dalam tehnik enumerasi adalah fungsi pembangkit. Fungsi pembangkit f(x) dari deret kuasa

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \qquad (4)$$

dalam beberapa variabel pengganti x. Koefisien a_k dari x^k adalah bilangan yang diinginkan, yang bergantung pada kumpulan dari k objek yang dapat dihitung.

Contoh 1:

Dalam fungsi pembangkit

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots + \binom{n}{n}x^n \qquad (5)$$

koefisien dari x^k banyaknya diberi dari kombinasi berbeda dari n objek berbeda diambil k kali dalam satu waktu.

Contoh 2:

Pandang fungsi pembangkit berikut

$$\begin{aligned}(1-x)^{-n} &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \end{aligned} \qquad (6)$$

koefisien dari x^k dalam (6) diberikan dengan cara mengambil k objek dari n objek berbeda dengan pengulangan tak terbatas. Perlu dicatat bahwa variabel x tidak mempunyai arti. Kita memperhatikan hanya koefisiennya.

Fungsi pembangkit digunakan untuk menghitung alat dan disebut juga deret hitung atau penghitung operasi dalam deret pembangkit sederhana dari pada operasi korespondensi pada barisan dari koefisien $a_0, a_1, a_2, \dots$.

PARTISI

Kegunaan lain dari konsep penting pada kombinatorik enumerasi adalah partisi dari bilangan bulat positif. Dimana bilangan bulat positif p menyatakan jumlah dari bilangan bulat positif

$$p = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \cdots + \lambda_q$$

sedemikian hingga

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq \cdots \geq \lambda_q \geq 1 \tag{7}$$

q tupel disebut partisi dari bilangan bulat p.

Contoh:

(5), (4 1), (3 2), (3 1 1), (2 2 1), (2 1 1 1), dan (1 1 1 1 1) adalah 7 partisi berbeda dari bilangan bulat 5.

Bilangan bulat λ_i disebut bagian dari bilangan partisi p. Lebih untung untuk memperlihatkan pengulangan bagian dengan arti dari eksponen.

Contoh:

Partisi (2 1 1 1) ditulis sebagai ($2\ 1^3$). Partisi dari bilangan bulat p boleh tidak dibatasi atau boleh mempunyai beberapa pembatasan, sedemikian hingga tidak ada pengulangan dari beberapa bagian (antara lain $\lambda_i \neq \lambda_j$ pada (7)), atau tidak ada bagian yang lebih besar dari k yang diberikan. Banyaknya partisi dari bilangan bulat p yang diberikan sering kali berlaku sama dengan fungsi pembangkit.

Contoh:

Koefisien dari x^k pada polinom

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^p) \tag{8}$$

memberikan banyaknya partisi, tanpa pengulangan, dari bilangan bulat $k \leq p$.

Partisi penting bagi kita sebab beberapa masalah enumerasi graf dapat dinyatakan dalam bentuk masalah-masalah partisi.

POHON BERAKAR TANPA LABEL

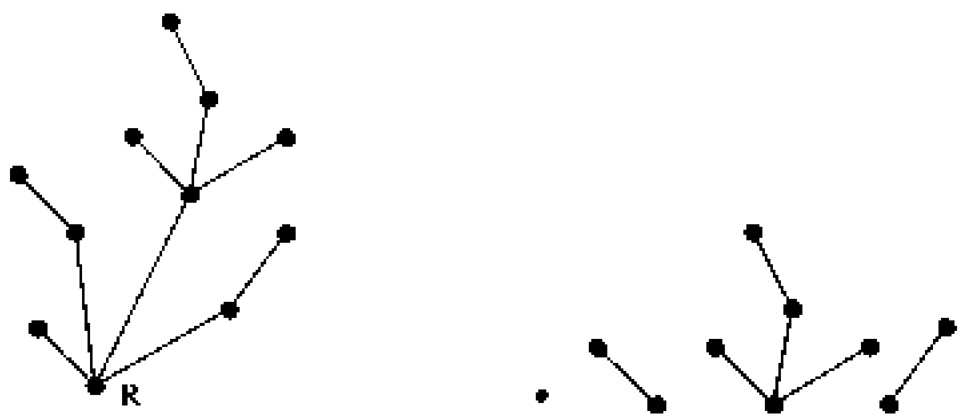
Kembali pada menghitung pohon, misal kita mengingat kembali tentang akar, pohon tanpa label adalah satu yang mana semua titik kecuali akar diasumsikan sama. Misal u_n banyaknya tanpa label, pohon berakar dari n titik dan misal u_n (m) banyaknya pohon berakar dari n titik dengan derajat dari akar adalah tepat m. Maka

$$u_n = \sum_{m=1}^{n-1} u_n(m)$$

Beberapa pohon berakar T dari n titik dan dengan akar R dari m derajat dapat terdiri atas m sub pohon berakar, masing-masing menghubungkan ke R artinya sisi antara akar dan R.

Contoh:

Pada Gambar 5, 11 titik, pohon akar terdiri dari empat sub pohon berakar.



Gambar 5

Pohon berakar terdiri dari 4 sub pohon berakar

Di dalam n titik pohon T, n-1 titik didistribusikan diantara m sub pohon, dan T menyatakan m bagian partisi dari bilangan n-1. Misalkan bahwa k_j adalah banyaknya sub pohon (dalam T) dengan j titik. Maka

$$k_1 + 2\,k_2 + 3\,k_3 + \ldots + (n\text{-}1)\,k_{n-1} = n\text{-}1 \qquad (9)$$

dan

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{n-1} = m \qquad (10)$$

Perlu dicatat bahwa persamaan (9) dan (10) menyatakan m bagian partisi dari bilangan bulat n-1, yang mana bilangan bulat i terdapat k_i kali ($0 \le k_i \le n\text{-}1$).

Pada Gambar 5, contoh:

$n = 11$ $\qquad$ $m = 4$

$k_1 = 1$ $\qquad$ $k_2 = 2$ $\qquad$ $k_5 = 1$

$k_3 = k_4 = k_6 = k_7 = \ldots = k_{10} = 0$

Maka $\Sigma\, k_j = 4$ dan $\Sigma\, j\, k_j = 10$.

Seseorang dapat menyusun u_j pohon-pohon berakar berbeda dengan j titik tanpa label. Diluar pohon-pohon kita pilih k_j pohon-pohon ke bentuk sub pohon dari T. Karena pohon sama boleh nampak lebih dari sekali sebagai sub pohon dari T, kita mempunyai masalah untuk menentukan banyaknya cara memilih k_j objek diluar u_j objek dengan tanpa pembatasan ulangan. Berdasarkan (6), bilangannya adalah

$$\binom{u_j + k_j - 1}{k_j} \qquad (11)$$

karena masing-masing pemilihan dapat membuat berdiri sendiri, kemungkinan bilangan dari pohon-pohon berbeda untuk partisi khusus adalah

$$u_n(k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{n-1}) = \binom{u_1 + k_1 - 1}{k_1}\binom{u_2 + k_2 - 1}{k_2}\cdots\binom{u_{n-1} + k_{n-1} - 1}{k_{n-1}} \qquad (12)$$

dimana $u_n(k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{n-1})$ berarti banyaknya n titik, pohon berakar berkoresponsensi ke partisi

$$1^{k_1} 2^{k_2} 3^{k_3} \cdots (n-1)^{k_{n-1}}$$

Penjumlahan dari $u_n(k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{n-1})$ terlebih semua kemungkinan partisi dari n-1 menghasilkan bilangan total dari pohon rentang yaitu

$$u_n = \sum_{\text{partisi dari } n-1} \prod_{j=1}^{n-1}\binom{u_j + k_j - 1}{k_j} \qquad (13)$$

Kita mendapat (13) dari perulangan relasi solusi khusus dari beberapa masalah kombinatorial. Diberikan u_n, banyaknya akar pohon tanpa label dari n titik, pada suku dari u_1, u_2, u_3 , … , u_{n-1}. Gunakan relasi untuk membuat tabel numerik langkah demi langkah bentuk.

Contoh:

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} u_1 + 1 - 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} u_2 + 1 - 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 + 2 - 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

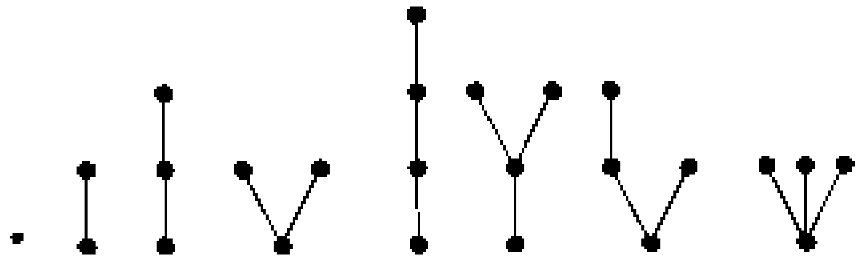
Nilai u_4, pertama kita tentukan semua partisi dari bilangan bulat 3, yaitu (3), (2 1), dan (1 1 1). Jumlah masing-masing suku yang menyokong partisi adalah

$$u_4 = \begin{pmatrix} u_3 + 1 - 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2 + 1 - 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 + 1 - 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 + 3 - 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4$$

Dengan cara yang sama, nilai u_5 kita peroleh dari bilangan bulat 4 yang mempunyai lima partisi yang berbeda, dan itu adalah (4), (3 1), (2 2), (2 1 1), dan (1 1 1 1). Banyaknya pohon berakar yang berkorespondensi masing-masing dengan 5 partisi didapat dengan menggunakan (12). Hasil jumlah u_5 adalah

$$\begin{aligned} u_5 &= \begin{pmatrix} u_1 + 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 + 1 \\ 2 \end{pmatrix} u_2 + \begin{pmatrix} u_2 + 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u_3 + u_4 \\ &= 1 + 1 + 1 + 2 + 4 = 9 \end{aligned}$$

dan seterusnya. Pada Gambar 6, semua akar, pohon-pohon tanpa label dari satu, dua, tiga dan empat titik yang diperlihatkan.



Gambar 6

Pohon berakar tanpa label dengan 1, 2, 3, dan 4 titik

Deret hitung untuk u_n : untuk mempersingkat beberapa perhitungan yang sulit dari u_n, kita cari deret hitung (antara lain fungsi pembangkit) u(x), dengan

$$u(x) = u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n \qquad (14)$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^{n-1}$$

substitusi (13) ke dalam (14) dan substitusi n-1 dengan partisi dari (9) sehingga berlaku

$$u(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\text{partisi dari } n-1} \binom{u_1 + k_1 - 1}{k_1} x^{k_1} \binom{u_2 + k_2 - 1}{k_2} x^{2k_2} \cdots \binom{u_{n-1} + k_{n-1} - 1}{k_{n-1}} x^{(n-1)k_{n-1}}$$

(15)

Teliti bahwa setiap barisan bilangan bulat positif membentuk partisi dari beberapa bilangan bulat, (15) dapat diatur sebagai

$$u(x) = x \left[\sum_{k_1=0}^{\infty} \binom{u_1 + k_1 - 1}{k_1} x^{k_1} \right] \left[\sum_{k_2=0}^{\infty} \binom{u_2 + k_2 - 1}{k_2} x^{2k_2} \right] \cdots \left[\sum_{k_{n-1}=0}^{\infty} \binom{u_{n-1} + k_{n-1} - 1}{k_{n-1}} x^{(n-1)k_{n-1}} \right] \cdots$$

(16)

Substitusi identitas

$$(1-x^{m})^{-p} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{p+j-1}{j} x^{mj}$$

dalam (16) didapat deret hitung yang diinginkan, yaitu

$$\begin{aligned} u(x) &= x(1-x)^{-u_1}(1-x^2)^{-u_2}(1-x^3)^{-u_3}\cdots \\ &= x\prod_{r=1}^{\infty}(1-x^r)^{-u_r} \end{aligned} \tag{17}$$

10 suku pertama pada deret (17) adalah

$$u(x) = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + 20x^6 + 48x^7 + 115x^8 + 286x^9 + 719x^{10} + \ldots \tag{17-a}$$

Fungsi pembangkit dari u(x) dapat dinyatakan ke dalam sebuah bentuk alternatif sebagai berikut:

Dengan logaritma asli dari kedua sisi persamaan (17), didapat

$$\begin{aligned} \ln u(x) &= \ln x - \sum_{r=1}^{\infty} u_r \ln(1-x^r) \\ &= \ln x + \sum_{r=1}^{\infty} u_r \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{ri}}{i} \\ &= \ln x + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sum_{r=1}^{\infty} u_r x^{ri} \\ &= \ln x + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} u(x^i) \end{aligned}$$

selanjutnya

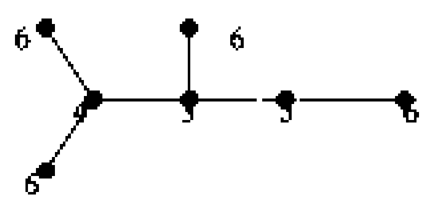
$$u(x) = x\, e^{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} u(x^i)} \tag{18}$$

Mendapatkan fungsi pembangkit untuk pohon tak berlabel dari pohon berakar tanpa label, dapat melihat sebuah pohon yang merupakan gabungan dari sub pohon berakar dari beberapa macam titik pusat yang berbeda dari semua titik lain pada pohon. Untuk hal ini kita akan menggunakan konsep titik pusat dari pada sebuah pohon.

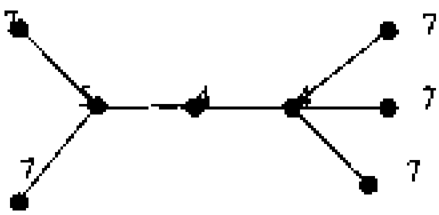
SENTROID

Dalam pohon T, pada sebarang titik v dari derajat d, terdapat d sub pohon dengan hanya v titik. Berat dari masing-masing sub pohon pada v didefinisikan sebagai banyaknya jumlah batang dari sub pohon. Maka berat dari titik v didefinisikan sebagai berat dari sub pohon terberat pada v. Sebuah titik dengan berat terkecil pada pohon T disebut sentroid dari T.

Pada suatu kasus dari pusat sebuah pohon dapat diperlihatkan bahwa setiap pohon memiliki suatu sentroid atau 2 sentroid yang berbatasan. Dapat juga diperlihatkan bahwa pohon yang memiliki 2 sentroid, sentroidnya ajasen. Pada gambar 7 sebuah pohon dengan 1 sentroid (disebut pohon sentroidal) dan pohon dengan 2 sentroid (disebut pohon bisentroidal). Sentroid diperlihatkan dengan sebuah titik yang dilingkari, dan bilangan selanjutnya menyatakan berat.



Pohon Sentroid



Pohon Bisentroid

Gambar 7

POHON TANPA LABEL BEBAS

Misal t'(x) deret hitung untuk pohon sentroid dan t''(x) deret hitung untuk pohon bisentroid, maka t(x) deret hitung untuk semua pohon, merupakan jumlah dari keduanya. Jadi

$$t(x) = t'(x) + t''(x) \tag{19}$$

Untuk t''(x), cari bahwa sebuah pohon bisentroid dengan n titik dapat dipandang terdiri dari 2 pohon berakar masing-masing dengan n/2 = m titik, dan dihubungkan pada akar dengan sebuah sisi (pohon bisentroid selalu mempunyai titik yang berjumlah genap). Kemudian banyaknya pohon bisentroid dengan n = 2m titik diberikan oleh

$$t''_n = \binom{u_m + 1}{2} = \frac{u_m(u_m + 1)}{2}$$

dan kemudian

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_m(u_m + 1)}{2} x^{2m} \\ t''(x) &= \tfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} u_m x^{2m} + \tfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} (u_m x^m)^2 \qquad (20) \\ &= \tfrac{1}{2} u(x^2) + \tfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} (u_m x^m)^2 \end{aligned}$$

Banyaknya titik, n, pada pohon sentroid dapat ganjil atau genap. Jika n adalah ganjil, berat maksimal sentroid dapat dimiliki yaitu ½(n-1). Maksimum hanya dicapai jika pohon ada pada bagian n-1 sisi. Keadaan lain, jika n genap dan pohon sentroid, berat maksimum dari sentroid yang dimiliki kemungkinan ½(n-2). Maksimum dicapai ketika derajat dari sentroid 3, dan salah satu sub pohon terdapat hanya pada satu sisi.

Kemudian, pandang n adalah ganjil atau genap, hal ini jelas bahwa n titik, pohon sentroid dapat dipandang sebagai komposisi dari beberapa pohon berakar, akar pada sentroid dan tak terdapat pohon berakar dapat memiliki lebih dari [(n-1)/2] sisi, dimana $\lfloor x \rfloor$ dinotasikan bilangan bulat terbesar dan tidak lebih besar dari x. Pada beberapa observasi, melibatkan manipulasi dari persamaan (18). Perhatikan persamaan berikut:

$$t'(x) = u(x) - \tfrac{1}{2}u^2(x) - \tfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(u_m x^m\right)^2 \qquad (21)$$

Jumlah (20) dan (21), kita ambil deret hitung tertentu:

$$t(x) = u(x) - 1/2(u^2(x) - u(x^2)) \qquad (22)$$

Relasi ini, memberikan deret hitung pohon dalam suku dari deret hitung pohon berakar, pertama kali diperoleh oleh Richard Otter pada 1948 dan diketahui sebagai rumus Otter. 10 suku pertama dari (22) adalah

$$t(x) = x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 11x^7 + 23x^8 + 47x^9 + 106x^{10} + \ldots$$

BAB IV

KESIMPULAN

a. Tipe-tipe enumerasi tergolong dalam 2 kategori yaitu:

1. Menghitung banyaknya graf berarah dari tipe-tipe tertentu.
2. Menghitung banyaknya graf bagian dari tipe-tipe khusus yang diberikan graf G, sedemikian hingga banyaknya lintasan sisi tak terhubung dengan panjang k antara titik a dan b dalam G

b. Banyaknya graf berlabel sederhana dengan n titik dan e sisi adalah $\binom{\frac{n(n-1)}{2}}{e}$.

c. Banyaknya graf berlabel sederhana dari n titik adalah $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

d. Banyaknya pohon berlabel dengan n titik dimana $n \geq 2$ adalah n^{n-2}.

e. Fungsi pembangkit f(x) dari deret kuasa

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

Dalam beberapa variabel pengganti x. Koefisien a_k dari x^k adalah bilangan yang diinginkan, yang bergantung pada kumpulan dari k objek yang dapat dihitung.

f. Partisi dari bilangan bulat p adalah jumlah dari bilangan bulat positif

$p = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \ldots + \lambda_q$

sedemikian hingga

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq \ldots \geq \lambda_q \geq 1$

q tupel.

g. Banyaknya pohon berakar tanpa label dari n titik adalah u_n, dimana

$$u_n = \sum_{\text{partisi dari } n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \binom{u_j + k_j - 1}{k_j}$$

h. Deret hitung untuk u_n adalah $u(x) = x \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - x^r\right)^{-u_r}$.

i. Sentroid dari T adalah sebuah titik dengan berat terkecil pada pohon T.

j. Deret hitung untuk semua pohon adalah $t(x) = u(x) - \frac{1}{2}(u^2(x) - u(x^2))$.

DAFTAR PUSTAKA

Balakrishnan, V. K., (1991). *Introductory Discrete Mathematics*. New Jersey: Prentice Hall Inc.

Deo, Narsingh., (1995). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. India: Prentice Hall Inc.

Harary, Frank., (1972). *Graph Theory*. New York: Addison Wesley Publishing Co.

Kusumah, Yaya S., (1995). *Hand Out Perkuliahan Matematika Diskrit*. Bandung: FPMIPA IKIP Bandung.

Purcell, Edwin J., (1994). *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2*. Jakarta: Erlangga.