

**MODEL OPTIMISASI PENGGANTIAN MESIN DENGAN
MEMPERTIMBANGKAN BIAYA KUALITAS
MENGUNAKAN PEMROGRAMAN DINAMIS**

Kusmaningrum Soemadi

Fifi Herni Mustofa, Lisye Fitria

Jurusan Teknik Industri
Institut Teknologi Nasional- Bandung

ABSTRAK

Mengacu pada filosofi Total Quality Management, kualitas produk yang dihasilkan tidak lagi dapat dipertahankan dengan inspeksi terhadap output saja, melainkan harus didukung dengan inspeksi terhadap proses. Dalam penelitian ini dikembangkan model optimisasi penggantian mesin yang mengalami deteriorasi dengan mempertimbangkan ongkos kualitas. Mesin akan rusak bila tingkat deteriorasi melebihi batas tertentu dan tercermin oleh ketidakmampuannya untuk berfungsi sesuai dengan spesifikasi tertentu sehingga menghasilkan produk cacat. Sejalan dengan umur dan pemakaiannya kerusakan mesin meningkat, demikian pula dengan jumlah produk cacat yang dihasilkan dan ongkos kualitas yang ditimbulkannya. Mesin dioperasikan selama siklus produksi T ($T < \infty$), diinspeksi N kali. Inspeksi di j , ($j=1,2,\dots, N$), dilakukan dengan mengambil sampel produk yang mengungkapkan status proses. Persoalan pemilihan keputusan di titik inspeksi j , diformulasikan dalam bentuk pemrograman dinamis dengan tujuan meminimasi ekspektasi total ongkos penggantian mesin dan ongkos kualitas selama T . Contoh numerik disajikan baik untuk mengilustrasikan kebijakan optimal maupun perilaku solusi optimal. Hasilnya menunjukkan bahwa biaya kualitas yang tinggi akan mendorong penggantian mesin secara dini sehingga meningkatkan frekuensi keputusan penggantian mesin.

Kata kunci: status proses mesin, ongkos kualitas, pemrograman dinamis

ABSTRACT

Based on the total quality management philosophy, quality can no longer be justified only by inspection of the output. Final inspection is being moved to the process level through adequate process inspection technique. This research deals with optimization model of a deteriorating machine by considering quality cost. After certain level of deterioration, the machine fails and characterized by its inability to meet certain specification. In such, defectives produced and quality cost incur. The machine was operated for a finite periode, T , ($T < \infty$), with N inspections over T . Inspection were accomplished by taking samples of the product that represent the state of the process. At each inspection point, the alternative decisions available were Keep the machine or Replace it with a new one. The problem of choosing decision in j , formulated by using dynamic programming to obtain total minimum replacement cost and quality cost over T . Numerical examples were presented for both illustrating the optimal policy and describing the behavior of the optimal solution. The results showed that quality cost consideration will induce early machine replacement thus increase the replacement frequency.

Keywords: machine state of process, quality cost, dynamic programming



PENDAHULUAN

Mengacu pada filosofi *Total Quality Management*, kualitas produk tidak lagi dapat dipertahankan dengan inspeksi terhadap output saja, melainkan harus didukung dengan inspeksi terhadap prosesnya. Untuk menghasilkan produk yang berkualitas, kondisi operasi mesin harus terjaga. Berbagai praktek manajemen baru menekankan pentingnya integrasi rencana perawatan pencegahan mesin dan penjaminan kualitas produk dengan tujuan memastikan operasi yang *defect-free* (Batson, 1999). Kecenderungan ini telah memicu berkembangnya model optimisasi gabungan antara perawatan mesin dan pengendalian kualitas produk (Ben-Daya, 1995).

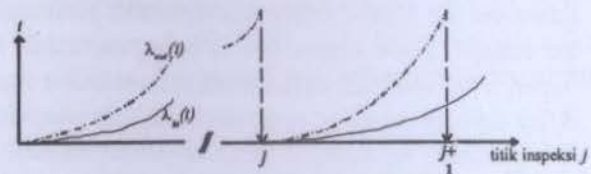
Dalam tulisan ini disajikan model optimisasi perawatan dan penggantian mesin dengan mempertimbangkan ongkos kualitas. Mesin terdeteriorasi karena penuaan dan kerusakan mesin tercermin dari ketidakmampuannya untuk berfungsi sesuai dengan spesifikasi tertentu, sehingga dihasilkan produk cacat. Kerusakan mesin meningkat sejalan dengan lamanya pemakaian, sehingga semakin tua umur mesin semakin banyak produk cacat yang dihasilkan. Penggantian mesin akan mengurangi jumlah cacat namun menimbulkan konsekuensi biaya yang perlu dipertimbangkan, sehingga diperlukan kebijakan yang memberikan keseimbangan antara ongkos penggantian mesin dan ongkos kualitas. Penelitian ini bertujuan mengembangkan model keputusan penggantian mesin pada suatu selang rencana operasi terbatas untuk meminimumkan ekspektasi total ongkos penggantian mesin dan ongkos kualitas.

Pengoperasian Mesin dan Proses Terjadinya Produk Cacat

Mesin produksi yang dipertimbangkan adalah mesin reparabel yang komponennya terdeteriorasi. Mesin direncanakan untuk dioperasikan selama T ($T < \infty$), dan selama siklus tersebut dilakukan N kali inspeksi dengan interval antarinspeksi s yang sama

panjang, sehingga jarak antartitik inspeksi $j, j = 1, 2, \dots, N$, adalah $s = T/N$, dan pada $j = N$, penggunaan mesin berakhir. Kerusakan mesin berakibat proses produksi tidak berjalan semestinya, dan didefinisikan sebagai salah satu penyebab dihasilkannya produk cacat. Menggunakan pendekatan Usher et al (1998), pemodelan kerusakan mesin direpresentasikan oleh *point process* dengan fungsi intensitas $l(t)$ yang merupakan fungsi dari umur mesin t . Diasumsikan kerusakan yang terjadi dapat segera terdeteksi dan diperbaiki dengan perbaikan minimal sehingga kinerja pasca perbaikan sama dengan sebelum kerusakan terjadi dan laju kerusakannya tidak berubah. Jadi, kejadian kerusakan mesin mengikuti proses Poisson nonhomogen (Barlow dan Proschan, 1965).

Pada awal siklus, mesin dalam keadaan baru dan status proses adalah *in control*; deteriorasi mesin berakibat status proses berpeluang bertransisi ke *out of control*. Ben Daya (1999) membedakan kondisi *in-control* dan *out-of-control* dengan menyatakan ongkos kualitas persatuan waktu di saat proses *in-control* adalah lebih rendah dari ongkos kualitas persatuan waktu di saat *out-of-control*. Hal ini disebabkan pada status *out-of-control* dihasilkan lebih banyak produk cacat. Dalam penelitian ini kondisi *in-control* dan *out-of-control* dimodelkan oleh dua intensitas kerusakan mesin yang berbeda yakni $l_{in}(t)$ dan $l_{out}(t)$, dengan $l_{out}(t) > l_{in}(t)$ sebagaimana dijelaskan pada Gambar 1.



Keterangan: bila di titik inspeksi j proses *out-of-control* maka dilakukan penggantian sehingga umur mesin menjadi 0

Gambar 1 Laju Kerusakan Mesin Berumur t Pada Kondisi *In-Control* dan *Out-of-Control*

Ekspektasi jumlah produk cacat yang dihasilkan di antara dua titik inspeksi bergantung pada hasil inspeksi di $j, j = 1, 2, \dots, N$. Bila inspeksi di j terhadap mesin berumur t menunjukkan bahwa status proses



in-control atau *out-of-control* maka ekspektasi jumlah produk cacat yang dihasilkan antara titik inspeksi $j-1$ dan j diberikan oleh $h_{in}(t-s,t)$ atau $h_{out}(t-s,t)$ yang dinyatakan oleh:

$$\begin{aligned}
 h_{in}(t-s,t) &= \int_{t-s}^t \lambda_{in}(\tau) d\tau, \text{ bila } in\text{-control} \\
 h_{out}(t-s,t) &= \int_{t-s}^t \lambda_{out}(\tau) d\tau, \text{ bila } out\text{-of-control} \\
 t-s \leq \tau \leq t \text{ untuk } t &= s, 2s, \dots, js. \quad 1
 \end{aligned}$$

Mesin mengalami deteriorasi sehingga baik $l_{in}(t)$ maupun $l_{out}(t)$ adalah fungsi *increasing* terhadap t . Dengan demikian maka $h_{in}(t,t+s)$ dan $h_{out}(t,t+s)$ juga merupakan fungsi *increasing* terhadap t .

METODOLOGI PENELITIAN

Pemodelan Status Proses

Berbagai model perawatan dengan mempertimbangkan kualitas yang telah dikembangkan, memodelkan deteriorasi mesin sebagai pergeseran proses produksi yang semula *in-control* menjadi *out-of-control* dengan distribusi kemungkinan tertentu (lihat Lee dan Rosenblatt, 1987; Makis dan Fung, 1995). Kedua kondisi tersebut ditetapkan berdasarkan inspeksi dengan melakukan pengambilan dan pengukuran sejumlah sampel secara periodik. Pada penelitian ini diasumsikan terdapat suatu kebijakan *sampling* di j ($j = 1, 2, \dots, N$), terhadap produk yang dihasilkan mesin.

Di awal siklus operasi mesin kondisinya baru dan status proses adalah *in-control*. Setelah dioperasikan mesin terdeteriorasi dan status proses dapat bergeser ke *out-of-control*. Waktu hingga terjadinya pergeseran diasumsikan adalah variabel random dengan distribusi general yang meningkat terhadap waktu. Maka bila umur mesin dinyatakan oleh t , peluang proses untuk bergeser ke *out-of-control* $p(t)$ adalah meningkat terhadap t . Pengambilan sampel di titik inspeksi j terhadap mesin berumur t mengungkapkan dua kemungkinan status proses di j yakni *out-of-control* dengan peluang $p(t)$, atau *in-control* dengan peluang $[1 - p(t)]$.

Penentuan status proses berdasarkan *sampling* mempunyai dua macam kesalahan

yang lazim dinyatakan sebagai kesalahan tipe 1 (menyatakan proses tidak *in-control* sedangkan sebenarnya *in-control*) dengan peluang α , dan kesalahan tipe 2 (menyatakan proses tidak *out-of-control* sedangkan sebenarnya *out-of-control*) dengan peluang β . Menggunakan pendekatan Ben-Daya (1999), inspeksi mesin di j dapat menghasilkan empat kombinasi status proses yang terungkap dan kesalahan *sampling* yang terjadi. Keempat status proses tersebut beserta peluangnya disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1 Status Proses Mesin yang Mungkin Terungkap di Titik Inspeksi j

No	Status Proses	Penjelasan	Peluang
1	<i>In-control and no alarm</i>	Hasil inspeksi mengindikasikan secara jelas bahwa proses <i>in-control</i> dan tanpa melakukan pemeriksaan lanjutan status di j direpson sebagai <i>in-control</i> .	$[(1-p(t))(1-\alpha)]$
2	<i>In-control and a false</i>	Hasil inspeksi cenderung menunjukkan proses <i>in-control</i> , namun perlu dilakukan pemeriksaan lanjutan sebelum status di j direpson sebagai <i>in-control</i>	$[(1-p(t))\alpha]$
3	<i>Out-of-control but no alarm</i>	Hasil inspeksi cenderung menunjukkan proses <i>out-of-control</i> dan setelah dicari sistem penyebabnya ternyata indikasi kerusakan mesin tak ditemukan sehingga pengoperasian mesin dilanjutkan.	$p(t)\beta$
4	<i>Out-of-control and true alarm</i>	Hasil inspeksi menunjukkan proses <i>out-of-control</i> dan setelah dicari sistem penyebabnya ternyata adalah kerusakan mesin. Status direpson sebagai <i>out-of-control</i> dan mesin diganti.	$p(t)(1-\beta)$

Selanjutnya sesuai penomorannya keempat status proses di Tabel 1 dinyatakan sebagai $a, a=1,2,3,4$. Status di $j+1$ dipengaruhi oleh status di j dan peluang perubahannya. Untuk menjelaskan terjadinya transisi status proses dari suatu titik inspeksi ke titik inspeksi berikutnya diasumsikan hal-hal berikut:

- Bila di j terungkap $a, a \in (1,2)$, maka di $j+1$ status proses yang mungkin adalah $a, a \in (1,2,3,4)$.
- Bila di j terungkap $a = 3$ maka di $j+1$ status mungkin adalah $a, a \in (3,4)$.
- Bila di j terungkap $a = 4$ mesin diganti sehingga di $(j+1)$ dioperasikan mesin baru. Maka di $j+1$ status yang mungkin adalah $a, a \in (1,2,3,4)$.

Asumsi kedua menunjukkan bahwa bila status proses di j adalah $a = 3$ yakni *out-of-control* dan tidak dilakukan penggantian



mesin, maka di $j+1$ status akan tetap *out-of-control* yang mungkin masih tak terungkap (*no-alarm*) dengan peluang β atau terungkap (*true-alarm*) dengan peluang $(1-\beta)$. Asumsi pertama dan ketiga adalah lazim. Menggunakan Tabel 1 dan asumsi adanya transisi status proses di antara dua titik inspeksi, maka bila status proses di j adalah a , dan status proses di $j+1$ adalah b ; peluang transisi dari j ke $j+1$ dinyatakan oleh $p_{ab'}$ dan p_{ab} merupakan elemen matriks P :

$$P = \begin{matrix} & & \begin{matrix} b \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} (1-p(t))(1-\alpha) & (1-p(t))\alpha & p(t)\beta & p(t)(1-\beta) \\ (1-p(t))(1-\alpha) & (1-p(t))\alpha & p(t)\beta & p(t)(1-\beta) \\ 0 & 0 & \beta & (1-\beta) \\ (1-p(t))(1-\alpha) & (1-p(t))\alpha & p(t)\beta & p(t)(1-\beta) \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2)$$

Ongkos Kualitas

Bila inspeksi di j mengungkapkan proses adalah *in-control* maka direspon sebagai $a = 1$, pengoperasian mesin dilanjutkan dan tidak timbul biaya apapun. Bila terdapat isyarat yang meragukan proses direspon sebagai $a = 2$, dan dilakukan pemeriksaan untuk memastikan status di j tersebut benar *in-control* dengan melakukan pengukuran ulang terhadap sampel, atau mengkalibrasi alat ukur. Pada kondisi ini status proses direspon sebagai $a = 2$, dan terdapat ongkos *false alarm* sebesar c_0 . Bila dari inspeksi di j terungkap proses *out-of-control* maka dilakukan pencarian sistem penyebab dengan ongkos *searching* sebesar c_1 . Bila sistem penyebab bukan kerusakan mesin maka status proses direspon sebagai $a = 3$, dan operasi mesin dapat dilanjutkan. Sedangkan bila sistem penyebab adalah kerusakan mesin maka direspon sebagai $a = 4$ dan status proses dikembalikan ke *in-control* dengan mengganti mesin dan timbul ongkos sebesar c_3 . Pada $a = 4$ seluruh produk yang dihasilkan selama $j-1, j$ diinspeksi 100% dan seluruh produk cacat yang ditemukan dirework dengan ongkos perunit c_2 . Jumlah cacat yang dihasilkan mesin berstatus *out-of-control* berumur t di titik j adalah $h_{out}(t-s, t)$, sehingga untuk $a=4$ ongkos rework c_{rew} adalah:

$$c_{rew} = c_2 h_{out}(t-s, t), \text{ untuk } a=4 \quad (3)$$

Pemeriksaan 100% dan tindakan *rework* tidak dilakukan pada status $a = 1, 2$, dan 3 , sehingga produk cacat yang mungkin dihasilkan pada status tersebut diteruskan ke stasiun kerja berikutnya atau disampaikan kepada konsumen bila mesin berada di stasiun kerja terakhir dari suatu proses produksi. Produk cacat tersebut terdeteksi di stasiun kerja berikutnya dan berakibat terganggunya proses atau timbulnya keluhan konsumen. Kondisi tersebut menimbulkan biaya yang lebih besar daripada biaya *rework*, mulai dari tambahan beban administrasi bila produk tersebut harus dikembalikan ke operasi sebelumnya, tertundanya penyelesaian produk sesuai rencana, hilangnya kepercayaan konsumen terhadap produk yang dihasilkan oleh perusahaan, dan sebagainya. Bila ongkos perunit cacat yang lolos adalah c_2' maka $c_2' > c_2$. Bila c_{eks} menyatakan ongkos akibat cacat yang tidak terpantau pada status $a=1, 2, 3$ maka c_{eks} dapat dinyatakan oleh:

$$c_{eks} = \begin{cases} c_2' h_{in}(t-s, t), & a = 1 \\ c_2' h_{in}(t-s, t), & a = 2 \\ c_2' h_{out}(t-s, t), & a = 3 \end{cases} \quad (4)$$

Pengembangan Model

Model yang dikembangkan merupakan perluasan penelitian Soemadi (2004) dengan mempertimbangkan hasil inspeksi yang terungkap di j , ($j = 1, 2, \dots, N$), selama siklus T berdasarkan *sampling* terhadap produk yang dihasilkan mesin. Hasil inspeksi mengungkap status proses yang digunakan sebagai dasar pemilihan keputusan yakni tetap mempertahankan mesin hingga titik inspeksi berikutnya, atau melakukan penggantian dengan mesin baru.

Keputusan di Titik Inspeksi j

Bila status *out-of-control* dan disebabkan oleh kerusakan mesin maka mesin diganti. Penggantian juga dapat dilakukan meskipun status *out-of-control* bukan disebabkan oleh kerusakan mesin. Bahkan tindakan penggantian juga dapat dilakukan

meskipun proses *in-control*. Menggunakan terminologi pustaka *Perawatan/Keandalan*, penggantian mesin sebelum terjadi kerusakan disebut penggantian pencegahan. Penggantian mesin pada status *in-control* bertujuan agar periode *in-control* berlangsung lebih lama sehingga ongkos perbaikan atau ongkos *rework* produk cacat dapat ditekan.

Di dalam penelitian ini keputusan penggantian pencegahan dipertimbangkan bila penyebab status *out-of-control* bukan kerusakan mesin ($a = 3$), dan ketika hasil inspeksi menunjukkan status proses *in-control* ($a = 1,2$). Maka diasumsikan sebagai hasil inspeksi di j ; terdapat tiga keputusan x_j yang dapat dipertimbangkan; yakni tetap mempertahankan mesin ($x_j = T$), dan melakukan penggantian mesin yang dibedakan sebagai penggantian kerusakan pada status $a=4$ ($x_j = G$), dan penggantian pencegahan pada status $a = 1,2,3$ ($x_j = \hat{G}$). Dengan demikian maka keputusan di titik inspeksi j dapat dinyatakan oleh:

$$x_j = \begin{cases} T, & a = 1,2,3 \\ G, & a = 4 \\ \hat{G}, & a = 1,2,3 \end{cases} \quad (5)$$

Ongkos penggantian pencegahan adalah c_4 , dan lazim dimodelkan lebih rendah daripada ongkos penggantian kerusakan sehingga $c_4 < c_3$ sehingga ekspektasi total ongkos penggantian mesin dan ongkos kualitas adalah fungsi dari pilihan keputusan yang diambil di setiap titik inspeksi. Penjumlahan ongkos akibat pilihan keputusan x_j ($j = 1, \dots, N-1$) dan ekspektasi ongkos kualitas akibat keputusan tersebut membentuk ekspektasi total ongkos selama $(0,T)$. Model bertujuan meminimumkan ekspektasi total ongkos selama $(0,T)$ dengan menentukan kebijakan optimal di setiap j , ($j = 1,2, \dots, N-1$). Keputusan di j mempengaruhi umur mesin di $j+1$, dan selanjutnya mendasari pemilihan keputusan di $j+1$, sehingga persoalan minimasi ekspektasi total ongkos selama T dimodelkan sebagai pemilihan urutan keputusan x_j ($j = 1, \dots, N-1$) yang memberikan ekspektasi total ongkos minimum. Salah satu metode penyelesaian yang sesuai adalah

Pemrograman Dinamis (Dreyfuss & Law, 1977).

Asumsi-asumsi yang diambil meliputi:

- Kerusakan mesin menjadi salah satu penyebab terjadinya produk cacat
- Status proses mesin terungkap sebagai hasil *sampling* terhadap produk
- Di awal perioda operasi status mesin *in control*, dan setelah dioperasikan berpeluang bertransisi ke *out-of-control*
- Bila terungkap status proses *out-of-control* dan penyebabnya adalah kerusakan mesin maka dilakukan penggantian
- Bila produk cacat ditemukan pada operasi mesin berikutnya atau sampai ke tangan konsumen maka timbul ongkos yang lebih besar dari ongkos *rework*.

Formulasi Pemrograman Dinamis

Intensitas kerusakan yang meningkat dinyatakan oleh Persamaan (1). Keputusan mengganti atau tetap mempertahankan mesin dilakukan di setiap j . Jumlah cacat selama interval $j-1, j$ bergantung pada umur mesin t dan status proses a yang terungkap di j . Karena kedua hal tersebut mendasari pilihan keputusan di tahap j , maka *status* di suatu tahap dinyatakan oleh (t,a) (Soemadi, 2004). Status proses di j beserta keputusan x_j mempunyai konsekuensi ongkos yang dituliskan dalam Tabel 2.

Tabel 2 Berbagai Ongkos di j yang Relevan dengan Status Proses (t,a) dan Keputusan x_j

Status Proses di j (t,a)	Keputusan di j	Ongkos False Alarm	Ongkos Searching	Ongkos Akibat Produk Cacat Selama $(j-1,j)$	Ongkos Penggantian Kerusakan	Ongkos Penggantian Pencegahan
(1,1)	$x_j = T$	-	-	c_{aks}	-	-
	$x_j = \hat{G}$	-	-	c_{aks}	-	c_4
(1,2)	$x_j = T$	c_0	-	c_{aks}	-	-
	$x_j = \hat{G}$	c_0	-	c_{aks}	-	c_4
(1,3)	$x_j = T$	-	c_1	c_{aks}	-	-
	$x_j = \hat{G}$	-	c_1	c_{aks}	-	c_4
(1,4)	$x_j = G$	-	c_1	c_{rew}	c_3	-

* c_{rew} : ongkos *rework* akibat produk cacat pada status proses $a=4$ dan dinyatakan oleh Persamaan (3).

c_{aks} : ongkos pada stasiun kerja berikutnya atau kerugian konsumen atau produk cacat pada status proses $a=1, 2, 3$ dan dinyatakan oleh Persamaan (4).

Bila $\gamma(t,a)$ menyatakan ongkos kualitas pada status a maka menggunakan (1) dan Tabel 2, $\gamma(t,a)$, dapat dinyatakan sebagai berikut:



$$\gamma(t, a) = \begin{cases} c_2' h_{in}(t-s, t), & a = 1 \\ c_0 + c_2' h_{in}(t-s, t), & a = 2 \\ c_1 + c_2' h_{out}(t-s, t), & a = 3 \\ c_1 + c_2' h_{out}(t-s, t), & a = 4 \end{cases} \quad (6)$$

Bila ongkos akibat pilihan keputusan x_j di tahap j dinyatakan oleh $\theta(x_j)$ maka menggunakan (5) dan Tabel 2, $\theta(x_j)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\theta(x_j) = \begin{cases} 0, & x_j = T \\ c_3, & x_j = G \\ c_4, & x_j = \hat{G} \end{cases} \quad (7)$$

Untuk $x_j = T$, umur mesin tak berubah sedangkan penggantian di j , berakibat $t=0$. Pemilihan x_j tergantung pada status awal di tahap j (t, a), dan berpengaruh terhadap status baru (t', a') saat mengawali interval operasi ($j, j+1$). Hubungan antara status awal, keputusan x_j , status baru di j , dan status awal di $j+1$ disajikan dalam Tabel 3.

Tabel 3 Status Awal (t, a) di Tahap j , Status Baru (t', a') akibat keputusan x_j , dan Status Awal yang Mungkin Terjadi di Tahap $j+1$

Tahap j		Tahap $j+1$	
Status Awal (t, a)	Keputusan x_j	Status Baru Awal (t', a')	Status Awal Awal (t', b)
$(t, 1)$	T	$(t, 1)$	$(t+s, b), b=1, \dots, 4$
	\hat{G}	$(0, 1)$	$(s, b), b=1, \dots, 4$
$(t, 2)$	T	$(t, 2)$	$(t+s, b), b=1, \dots, 4$
	\hat{G}	$(0, 1)$	$(s, b), b=1, \dots, 4$
$(t, 3)$	T	$(t, 3)$	$(t+s, b), b=3, 4$
	\hat{G}	$(0, 1)$	$(s, b), b=1, \dots, 4$
$(t, 4)$	G	$(0, 1)$	$(s, b), b=1, \dots, 4$

Model bertujuan memilih $x_j, j=1, 2, \dots, N-1$ guna meminimumkan ekspektasi total ongkos penggantian dan ongkos kualitas selama T , dengan menyatakan:

$F_j(t, a)$: ekspektasi fungsi ongkos penggantian dan ongkos kualitas di tahap j dan tahap berikutnya ($j+1, \dots, N$) bila status di j adalah (t, a) .

$F_j^*(t, a)$: ekspektasi fungsi ongkos penggantian dan ongkos kualitas terbaik di tahap j dan tahap berikutnya ($j+1, \dots, N$) bila status di j adalah (t, a) .

Menggunakan Persamaan (6) dan (7), serta matriks peluang transisi P pada Persamaan (2), maka persamaan rekursif di suatu tahap $j, j=1, 2, \dots, N-1$ diturunkan sebagai:

$$F_j(t, a) = \begin{cases} \gamma(t, a) + \theta(x_j) + \sum_{b=1}^4 P_{ab} \times F_{j+1}(t+s, b), & a=1, 2, 3, \forall t, x_j = T \\ \min \left\{ \begin{aligned} &\gamma(t, a) + \theta(x_j) + \sum_{b=1}^4 P_{ab} \times F_{j+1}(s, b) \\ &\gamma(t, a) + \theta(x_j) + \sum_{b=1}^4 P_{ab} \times F_{j+1}(s, b) \end{aligned} \right. & a=1, 2, 3, \forall t, x_j = \hat{G} \\ \gamma(t, a) + \theta(x_j) + \sum_{b=1}^4 P_{ab} \times F_{j+1}(s, b) & a=4, \forall t, x_j = G \end{cases} \quad (8)$$

Untuk $j=1, \dots, N-1$.

Untuk kondisi batas yakni $j = N$ tidak terdapat pengambilan keputusan sehingga:

$$F_N^*(t, a) = \gamma(t, a) \quad (9)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Contoh Numerik

Contoh numerik disajikan untuk memberikan gambaran solusi optimal yang dihasilkan dan menguji kepekaannya terhadap perubahan nilai parameter model. Persoalan penentuan keputusan $x_j, j=1, \dots, N-1$ diselesaikan menggunakan Pemrograman Dinamis dengan metode *backward*. Model diaplikasikan terhadap set data berikut. Panjang siklus operasi mesin 8 jam, inspeksi dilakukan 8 kali dengan selang waktu antar inspeksi 1 jam. Dengan demikian $T=8$ dan $s=1$ jam. Ongkos *false alarm* 5 satuan ongkos, ongkos *searching* 6 satuan ongkos, dan ongkos *rework* 2 satuan ongkos perunit, sedangkan ongkos keluhan konsumen akibat membeli produk cacat adalah 4 satuan ongkos perunit. Maka $c_0 = 5, c_1 = 6, c_2 = 2$, dan $c_2' = 4$. Selanjutnya ongkos penggantian kerusakan adalah 110 satuan ongkos, dan ongkos penggantian pencegahan mesin 100 satuan ongkos, sehingga $c_3 = 110, c_4 = 100$.

Peluang transisi proses ke *out-of-control* di umur t meningkat terhadap t dan dimodelkan oleh fungsi $p(t) = \min [(1+i)^t - 1, 1], t > 0, i=6\%$. Produk cacat yang dihasilkan mesin mengikuti laju kerusakan yang meningkat dan dimodelkan sebagai fungsi pangkat $\lambda(t) = \delta \eta \cdot t^{\eta-1}, t > 0$, dan $\eta > 1$. Dalam contoh ini digunakan nilai $\delta_{in} = \delta_{out} = 2, \eta_{in} = 1,25$, dan $\eta_{out} = 1,6$. Besarnya kesalahan Tipe I

dan Ti
0,3.
S
dan di
total
ongko
berbag
j. Di j =
inspeks
T
status
t a
1 2
3
2 2
3
3 2
3
4 2
3
5 2
3
6 2
3
7 2
3
S
yang r
4 pilih
ditamp
pengg
penceg
untuk
mesin
keputu
yang r
1,2,3,4.
di j = 2
keputu
terungg
x₄* = G

dan Tipe II dinyatakan oleh $\alpha = 0,15$ dan $\beta = 0,3$.

Solusi optimal disajikan pada Tabel 4 dan dinyatakan oleh dua hal, yakni ekspektasi total ongkos optimal sebesar 112,923 satuan ongkos, dan keputusan optimal x_j pada berbagai status (t,a) yang mungkin terjadi di j . Di $j = 0$ mesin berumur 0 maka di setiap titik inspeksi j umur mesin t selalu memenuhi $t \leq j$.

Tabel 4 Solusi Optimal dari Contoh Kasus

status		SOLUSI OPTIMAL: 112,923						
		Kebijakan optimal x_j di titik inspeksi j						
t	a	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
1	1	T	T	T	T	T	T	T
	2	T	T	T	T	T	T	T
	3	T	T	T	T	T	T	T
2	1		T	T	T	T	T	T
	2		T	T	T	T	T	T
	3		T	T	\hat{G}	\hat{G}	T	T
3	1			T	T	T	T	T
	2			T	T	T	T	T
	3			T	\hat{G}	\hat{G}	T	T
4	1				T	T	T	T
	2				T	T	T	T
	3				\hat{G}	\hat{G}	T	T
5	1					T	T	T
	2					T	T	T
	3					\hat{G}	\hat{G}	T
6	1						T	T
	2						T	T
	3						\hat{G}	T
7	1							T
	2							T
	3							T

Selanjutnya untuk status $a = 4$ mesin yang rusak selalu diganti sehingga pada Tabel 4 pilihan keputusan untuk status tersebut tak ditampilkan. Maka dalam Tabel 4 keputusan penggantian hanyalah penggantian pencegahan ($x_j = \hat{G}$). Karena keputusan untuk $a = 4$ tak ditampilkan, di $j = 1$, umur mesin adalah $t = 1$, dengan $a = 1,2,3$, dan keputusannya $x_1^* = T$ sehingga di $j = 2$ status yang mungkin adalah (t,a) , $t = 2$, dan $a = 1,2,3,4$. Keputusan yang sama juga dilakukan di $j = 2$ dan $j = 3$ yang untuk $a = 1,2,3$ semua keputusan adalah $x_j^* = T$. Baru di $j = 4$, bila terungkap status $(2,3)$, $(3,3)$ atau $(4,3)$ sehingga $x_4^* = \hat{G}$, sedangkan di luar status tersebut x_4^*

$= T$. Maka pada $j = 5$ terdapat dua kemungkinan umur mesin, yakni $t = 1$ akibat penggantian mesin di $j = 4$, dan $t = 5$ akibat mempertahankan mesin berumur 4 di $j = 4$. Kedua kemungkinan ini ditunjukkan oleh bagian yang digelapkan di bawah kolom $j = 5$ yakni pada baris $t = 1$ dan baris $t = 4$. Seluruh keputusan kondisional untuk $a = 1,2,3$ di setiap titik j ditunjukkan oleh bagian yang digelapkan pada Tabel 4 tersebut.

Analisis Kepekaan

Uji sensitivitas terhadap model dibatasi terhadap dua nilai parameter $p(t)$, dan $\lambda(t)$, pada nilai rendah dan nilai tinggi sehingga terdapat empat kombinasi. Selanjutnya untuk mengetahui pengaruh tingkat kesalahan a dan b maka keempat kombinasi di atas juga dicoba pada dua harga kedua tipe kesalahan tersebut. Set data yang dipergunakan adalah sama dengan set data contoh numerik. Perbedaan $p(t)$ rendah dan tinggi direpresentasikan oleh harga $i_{rendah} = 2\%$ dan $i_{tinggi} = 6\%$. Selanjutnya harga $\lambda_{out}(t)$ rendah dan tinggi diwakili oleh $\lambda_{rendah} = 1,15$ dan $\lambda_{tinggi} = 1,95$. Solusi optimal yang dihasilkan dengan skenario tersebut ditampilkan dalam Tabel 5 dan Tabel 6. Kedua tabel hanya menyajikan ekspektasi total ongkos karena seluruh keputusan kondisional terlalu rumit untuk ditampilkan.

Dari hasil skenario uji sensitivitas terlihat bahwa kenaikan $\lambda_{out}(t)$, dan nilai $p(t)$ yang identik dengan meningkatnya jumlah cacat berpengaruh terhadap meningkatnya ekspektasi total ongkos optimal. Peningkatan α juga memberikan dampak yang sama, karena model merepresentasikan total ongkos penggantian mesin dan ongkos kualitas dari sisi produsen, sehingga semakin besar resiko produsen berkontribusi terhadap peningkatan ongkos optimal. Pada suatu kombinasi ongkos penggantian mesin dan ongkos kualitas tertentu, kenaikan ke tiga parameter model meningkatkan frekuensi penggantian mesin pada umur yang lebih muda dan status proses yang lebih baik. Sebaliknya dengan semakin besarnya β berakibat penurunan ekspektasi total ongkos yang dihasilkan serta



menurunkan kecenderungan penggantian pencegahan di suatu titik inspeksi.

Tabel 5 Solusi Optimal Skenario $\beta = 0,05$

	η_{rendah}		η_{tinggi}	
	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,15$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,15$
$p(t)_{rendah}$	47,988	51,734	47,994	51,740
$p(t)_{tinggi}$	113,719	117,132	113,730	117,144

Tabel 6 Solusi Optimal Skenario $\alpha = 0,05$

	η_{rendah}		η_{tinggi}	
	$\beta = 0,10$	$\beta = 0,25$	$\beta = 0,10$	$\beta = 0,25$
$p(t)_{rendah}$	47,322	45,100	47,340	45,124
$p(t)_{tinggi}$	112,242	107,240	112,267	107,270

KESIMPULAN DAN SARAN

Model yang dikembangkan adalah model optimisasi penggantian mesin dengan mempertimbangkan ongkos kualitas yang diformulasikan sebagai persoalan Pemrograman Dinamis. Alternatif keputusan di setiap titik inspeksi adalah mempertahankan atau mengganti mesin yang dioperasikan. Ongkos kualitas yang dipertimbangkan adalah ongkos *false alarm* karena mendapatkan persepsi yang kurang tepat terhadap hasil inspeksi, ongkos *searching* untuk menentukan sistem penyebab *out-of-control*, ongkos *rework* produk cacat, dan kerugian yang timbul karena produk cacat mengganggu proses di stasiun kerja berikutnya atau sampai ke tangan konsumen. Hasil uji sensitivitas pada contoh numerik menunjukkan bahwa dengan mempertimbangkan ongkos kualitas kewaspadaan terhadap penurunan kinerja mesin meningkat sehingga memicu kecenderungan melakukan penggantian pencegahan di umur yang lebih dini. Maka dengan mempertimbangkan ongkos kualitas rumusan kebijakan penggantian pencegahan dapat diperbaiki.

Dalam beberapa situasi pergeseran proses ke *out-of-control* juga dapat dipengaruhi baik oleh waktu pemakaian dan tingkat pemakaian mesin tersebut. Saran penelitian lanjutan adalah dengan mempertimbangkan pola utilisasi mesin yang tidak homogen yakni dengan menambah status utilisasi mesin (Hartman, 2001).

Notasi

- \mathcal{T} : panjang siklus produksi
- $N, (j)$: jumlah titik inspeksi selama siklus produksi, (titik inspeksi, $j=0, 1, \dots, N$)
- s : selang antar inspeksi, $s = \mathcal{T}/N$
- T : umur mesin di suatu j ;
- A : status proses di j
- x_j : tindakan pada suatu j , $x_j = T, G, \hat{G}$
- T : tetap meneruskan pengoperasian mesin di j
- $G, (\hat{G})$: melakukan penggantian kerusakan (melakukan penggantian pencegahan) di j
- $\lambda_{in}(t), (\lambda_{out}(t))$: intensitas kerusakan mesin berumur t saat proses *in-control* (*out-of-control*)
- $\lambda(t-s, t)$: ekspektasi jumlah cacat yang dihasilkan oleh mesin berumur t selama s
- α : peluang (sampel di luar batas kendali saat proses *in-control*)
- β : peluang (sampel dalam batas kendali saat proses *out-of-control*)
- $p(t)$: peluang menemukan status *out-of-control* pada mesin berumur t
- c_0 : ongkos per kejadian false alarm
- c_1 : ongkos *searching* untuk mencari penyebab status proses *out-of-control*
- c_2 : ongkos *rework* per unit produk cacat sesaat setelah diproduksi
- $c_3, (c_4)$: ongkos penggantian kerusakan, ongkos penggantian pencegahan
- $crew$: ongkos *rework* produk cacat untuk $a = 4$
- c_2' : ongkos per unit produk cacat yang sampai ke stasiun kerja berikutnya atau ke konsumen
- c_{eks} : ongkos produk cacat untuk $a = 1,2,3$.

DAFTAR PUSTAKA

- Barlow, R. E., Proschan, F. 1965. *Mathematical Theory of Reliability*. John Wiley & Sons Inc. New York
- Batson, B., Fowler, B. 1999. How Equipment Maintenance Helps Assure Product Quality, *Proceedings of the Industrial Engineering Research Conference*. Phoenix. Arizona
- Ben-Daya, M., Duffuaa, S.O. 1995. Maintenance and Quality, The Missing Link, *Journal of Quality in Maintenance Engineering* 1,1, hal. 20-26
- Ben-Daya, M. 1999. Integrated Production Maintenance and Quality Model for Imperfect Process, *IIE Transactions*. 31. hal. 491-501
- Dreyfus, S.E., Law, A.M. 1977. *The Art and Theory of Dynamic Programming*. Academic Press Inc. New York
- Hartman, J. C. 2001. An Economic Replacement Model with Probabilistic Asset Utilization, *IIE Transactions*. 33. 9. hal. 717-728
- Lee, H. L., Rosenblatt, M. J. 1987. Simultaneous Determination of Production Cycle and Inspection Schedules in a Production System, *Management Science*. 33. 9. hal. 1125-1136
- Makis, V. dan Fung, J. 1995. Optimal Preventive Replacement, Lot Sizing and Inspection Policy for a Deteriorating Production System, *Journal of Quality in Maintenance Engineering* 1. 4. hal. 1355-2511
- Soemadi, K. 2004. Model Penggantian Optimal Untuk Mesin Reparabel Bergaransi dengan Pemrograman Dinamis. *Disertasi Doktor*. Departemen Teknik Industri. Institut Teknologi Bandung
- Usher, J.S., Kamal, A.H., Syed, W.H. 1998. Cost Optimal Preventive Maintenance and Replacement Scheduling, *IIE Transactions*. 30. hal. 121-1128.

